Mathématiques

Enseignement scientifique et mathématique, classe de première

Mai 2022

Sommaire

Préambule général

Intentions majeures

Le programme du module spécifique consacré à un enseignement mathématique intégré à l'enseignement scientifique et mathématique de la classe de première de la voie générale est conçu avec les intentions suivantes :

- consolider la culture mathématique de tous les élèves et leur assurer le socle de connaissances et de compétences mathématiques qui leur sera nécessaire pour réussir leur vie sociale, citoyenne et professionnelle, quel que soit le parcours de formation qu'ils choisiront par la suite ;
- réconcilier avec les mathématiques les élèves qui ont perdu le goût et l'intérêt pour cette discipline ; communiquer le plaisir de les pratiquer à travers des activités mettant en valeur leur efficacité et éclairer sur la place qu'elles jouent dans le monde contemporain ;
- permettre à chaque élève d'appréhender la pertinence des démarches mathématiques et de développer des aptitudes intellectuelles comme la rigueur, la logique, l'esprit critique mais aussi l'inventivité et la créativité ;
- assurer les bases nécessaires à la compréhension de phénomènes quantitatifs tels qu'ils sont mobilisés dans les différents champs disciplinaires et tels qu'ils permettent d'éclairer certains débats actuels ;
- permettre aux élèves qui le souhaitent de poursuivre avec succès leur formation en classe de terminale par le choix de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires.

Lignes directrices pour l'enseignement

Attitudes développées

L'enseignement des mathématiques participe à la formation intellectuelle des élèves en contribuant au développement d'attitudes propices à la poursuite d'études, mais aussi à l'exercice responsable de la citoyenneté. Parmi elles, peuvent notamment être mentionnés la persévérance dans la recherche d'une solution, l'esprit critique, l'engagement réfléchi dans un débat, le souci d'argumenter sa pensée par un raisonnement logique, la qualité d'expression écrite et orale, l'esprit de collaboration dans un travail d'équipe.

La résolution d'exercices et de problèmes, individuellement ou en groupe, l'organisation de réflexions et d'échanges scientifiques pour valider un résultat ou une méthode sont des occasions fécondes pour développer ces attitudes indispensables à la formation de chaque individu et à la responsabilité du citoyen.

Les élèves prennent conscience que les mathématiques sont vivantes et en perpétuelle évolution, qu'elles s'inscrivent dans un cadre historique mais aussi dans la société actuelle. Il s'agit en particulier :

- d'insérer des éléments d'histoire des mathématiques et des sciences ;
- de présenter des faits d'actualité liés aux mathématiques ;
- de faire connaître des études supérieures et des métiers où les mathématiques sont utilisées, en valorisant la place des femmes en mathématiques et en sciences.

Compétences mathématiques

Dans le prolongement des cycles précédents, le travail en mathématiques s'appuie sur six compétences essentielles :

- **chercher**, expérimenter, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- **modéliser**, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- **représenter**, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique), changer de registre ;
- **raisonner**, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- **calculer**, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- **communiquer** un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

La résolution de problèmes offre un cadre privilégié pour travailler ces six compétences tout en développant des aptitudes transversales.

Résolution de problèmes et automatismes

La résolution de problèmes, centrale dans l'activité mathématique, est au cœur de ce programme qui privilégie une introduction des contenus mathématiques à travers des situations appropriées, puis leur mobilisation dans le cadre de problèmes qui les mettent en jeu.
Ces problèmes sont le plus souvent issus des autres disciplines, de la vie courante ou citoyenne, mais peuvent aussi être internes aux mathématiques. Le professeur de mathématiques est invité à travailler avec les professeurs des disciplines concernées afin de favoriser les articulations et les transferts, et consolider ainsi les acquis des élèves.

Les activités engagées en classe s'articulent autour du triptyque *Manipuler – Verbaliser – Abstraire*. La manipulation peut être concrète ou virtuelle, prenant appui sur des instruments ou des objets réels (instruments géométriques, jeux de cartes ou lancers de dés) ou des outils numériques tels qu'une calculatrice, un tableur, un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation.
Il convient de garder à l'esprit que la phase de manipulation ne constitue pas une fin en soi. Comme la verbalisation qui l'accompagne ou y fait suite, la manipulation n'est qu'une étape permettant de dégager un contenu mathématique qui fera l'objet d'une institutionnalisation bien identifiée.
L'approche par résolution de problèmes est particulièrement propice à la mise en œuvre de la compétence *Modéliser*, en recherchant un modèle adapté à la situation étudiée ou en s'assurant de la bonne compréhension et de la validité d'un modèle donné, et de la compétence *Représenter*, en vue de schématiser les données d'un problème et de faciliter la recherche d'une stratégie efficace pour sa résolution.
Les problèmes avec prise d'initiative permettent de travailler la compétence *Chercher* et de renforcer la capacité à résoudre un problème dont l'énoncé n'indique pas la méthode de résolution. Ils doivent faire l'objet d'un entraînement suffisamment régulier pour permettre aux élèves d'y accéder plus facilement en prenant conscience de certaines similitudes entre des situations différentes relevant d'une même démarche mathématique.

Progressivement, l'élève procède par analogie en rattachant une situation particulière à une classe plus générale de problèmes ou en adaptant une méthode connue à la situation étudiée. La disponibilité d'esprit nécessaire à ces étapes essentielles suppose des connaissances, des procédures et des stratégies

automatisées. Ainsi, l'installation de réflexes intellectuels en matière de calcul et d'interprétation des données facilite la résolution de problèmes, en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique.
La ritualisation, par exemple au début de chaque séance, d'activités courtes consacrées au calcul ou à la lecture et au traitement de l'information chiffrée favorise la stabilisation des connaissances et des méthodes étudiées dans les classes antérieures. Il ne s'agit pas de réduire les mathématiques à des activités répétitives, mais de permettre un ancrage solide des fondamentaux immédiatement mobilisables pour résoudre des problèmes.
Les activités visant l'acquisition d'automatismes fournissent par ailleurs des conditions de réussite rapide et mettent l'élève en confiance pour s'engager dans la résolution de problèmes.
Dans la partie *Habiletés mathématiques de base et automatismes* du programme sont énumérées les connaissances et les capacités relevant du double objectif d'assurer une culture mathématique de base nécessaire à chaque futur citoyen et de développer les réflexes mathématiques indispensables à la poursuite d'études réussies.

▪ Différenciation de l'enseignement

Les élèves de première de la voie générale ont des projets d'orientation divers qui les conduiront en terminale à une fréquentation plus ou moins importante des mathématiques. Celle-ci pourra se limiter au suivi de l'enseignement scientifique, à trois heures hebdomadaires pour ceux qui choisiront l'option *Mathématiques complémentaires*, à six heures pour ceux qui poursuivront la spécialité *Mathématiques*, ou bien à neuf heures pour ceux qui choisiront en plus l'option *Mathématiques expertes*.
Cette variété des profils d'élèves exige la mise en œuvre d'un enseignement différencié prenant en compte l'hétérogénéité de leurs aptitudes, de leurs besoins et de leurs intérêts.
On a coutume de distinguer la différenciation successive et la différenciation simultanée.

La différenciation successive porte sur l'utilisation, les unes après les autres et dans le déroulement même du cours, d'activités suffisamment variées pour que chaque élève puisse trouver la manière de progresser qui lui convient le mieux. La diversification concerne aussi bien les contextes (internes aux mathématiques ou liés à des situations issues d'autres disciplines, de la vie quotidienne ou citoyenne) que les types de tâches proposées :

- questions « flash » pour favoriser l'acquisition d'habiletés mathématiques de base et d'automatismes ;
- exercices d'application et d'entraînement pour stabiliser et consolider les connaissances ;
- résolution de problèmes favorisant la prise d'initiative ;
- investigation à l'aide d'outils numériques dont le choix peut être différent selon les élèves ;
- débats à l'oral et mise au point collective d'une solution ;
- production d'écrits individuels ou collectifs ;
- réalisation hors du temps scolaire d'exposés, de capsules audio ou vidéo ;
- mise en œuvre d'un projet d'ampleur adaptée.

Ce type de différenciation, compatible avec le fonctionnement d'une leçon collective, se distingue de la différenciation simultanée décrite ci-dessous.
Au sein de la classe, les élèves, individuellement ou au sein de groupes, travaillent en même temps sur des tâches différentes. Ce mode de différenciation suppose que l'enseignant ait auparavant identifié les besoins, aptitudes et intérêts de ses élèves, qu'il ait conçu différents parcours d'apprentissage et qu'il ait prévu les

organisations de classe les mieux adaptées à la réussite de chacun (plans de travail personnalisés, ateliers tournants, groupes d'entraide ou de besoin).

Parmi les paramètres sur lesquels on peut jouer pour réaliser ce type de différenciation, citons, de façon non exhaustive :

- les modalités d'introduction des différentes notions mathématiques figurant au programme et les problèmes choisis pour les motiver ou les illustrer ;
- le niveau de formalisation d'un raisonnement ou d'une démonstration : en particulier, pour certains élèves, le professeur pourra exploiter, autant que faire se peut, des représentations schématisées ou graphiques privilégiant une démarche visuelle plutôt que formelle ;
- les supports (textes, images, vidéos, etc.) ;
- les modalités d'organisation de la tâche à réaliser, en évaluation comme en formation ; celles-ci varient en fonction des outils mis à disposition, des aides apportées par l'enseignant ou par les pairs, de la nature des consignes, du temps dont dispose l'élève ;
- les processus mis en œuvre pour réaliser la tâche : raisonnement par tâtonnement, par essai-erreur, par déduction logique ; recours ou non à des outils numériques ;
- les productions attendues (écrites ou orales, individuelles ou par groupes, complètes ou partielles).

Évaluation des élèves

La diversification des modalités d'évaluation permet d'atteindre un équilibre dans la prise en compte des six compétences mathématiques.
En fonction des objectifs poursuivis et selon les compétences évaluées, l'évaluation prend appui sur différents types d'activités.
L'évaluation spécifique de la prise d'initiative va au-delà de la réponse donnée et s'applique aux compétences mobilisées à travers la démarche mise en œuvre.
Des questionnaires à choix multiples (QCM) ou des Vrai-Faux argumentés permettent d'évaluer des capacités de raisonnement de différents types.
Le développement de la pratique de l'oral contribue également à varier les pratiques d'évaluation.
Ainsi, la compétence *Communiquer* peut être évaluée dans le cadre d'une restitution orale de connaissances, de l'argumentation d'une démarche mise en œuvre dans la résolution d'un problème, ou encore dans la présentation d'exposés courts.
Les échanges oraux aident l'élève à structurer sa pensée et permettent de lever des obstacles qui auraient pu empêcher de révéler d'autres compétences.
Les évaluations écrites avec appel au professeur offrent aussi cette possibilité, avec une validation intermédiaire ou un « coup de pouce ».
La capacité à mener une démarche d'investigation peut être évaluée en mettant à disposition de l'élève des outils numériques et en le laissant choisir le plus adapté pour résoudre un problème.

Si la classe est le lieu privilégié pour la mise en activité des élèves, les travaux hors du temps scolaire sont indispensables pour consolider les apprentissages. Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, ces travaux sont essentiels à la formation des élèves. Individuels ou collectifs, à l'écrit ou à l'oral, ils sont conçus de façon à prendre en compte la diversité des aptitudes des élèves et visent la mémorisation, la maîtrise des savoir-faire, le réinvestissement de démarches ou de méthodes.

Activités algorithmiques et numériques

Le développement d'un mode de pensée algorithmique est constitutif de la formation mathématique. L'enseignement des mathématiques comprend une composante informatique qui recouvre l'algorithmique, la programmation et la pratique du tableur. Cette dimension s'inscrit de manière transversale dans le cours de mathématiques et repose sur la connaissance d'un nombre limité d'éléments de syntaxe et de fonctions spécifiques à l'outil utilisé. De ce point de vue, le recours au tableur ou à un logiciel de programmation offre une voie de différenciation.
Parallèlement, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique enrichit le cours de mathématiques d'illustrations ou de simulations propices à l'appropriation des concepts.
Dans certaines situations, le recours à un outil de calcul formel permet de se libérer de contraintes techniques afin de mieux se concentrer sur l'activité de modélisation de la situation et d'interprétation des résultats obtenus. L'utilisation d'un logiciel intégrant des fonctionnalités graphiques, de calcul numérique et de calcul formel facilite les changements de registres.

Place de l'oral

Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l'appropriation des notions mathématiques et la résolution des problèmes. Comme toutes les disciplines, les mathématiques contribuent au développement des compétences orales, notamment à travers la pratique de l'argumentation. Celle-ci conduit à préciser sa réflexion et à expliciter sa démarche de manière à convaincre. Elle permet à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu'à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve. Des situations variées se prêtent à la pratique de l'oral en mathématiques : la reformulation par l'élève d'un énoncé ou d'une démarche, les échanges interactifs lors de la construction du cours, les mises en commun après un temps de recherche, les corrections d'exercices, les travaux de groupe, les exposés individuels ou à plusieurs (éventuellement sous forme de vidéo), etc.
En mathématiques, l'oral mobilise à la fois le langage naturel et le langage symbolique dans ses différents registres (graphiques, formules, calculs).

Trace écrite

Disposer d'une trace de cours claire, explicite et structurée est une aide essentielle à l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux étapes importantes de recherche, d'appropriation individuelle ou collective, de présentation commentée ou de débats, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les méthodes et les stratégies étudiées en classe. Explicitant les liens entre les différentes notions ainsi que leurs objectifs, gagnant à être enrichie par des exemples et des schémas, elle constitue pour l'élève une référence vers laquelle il peut se tourner autant que de besoin, tout au long du cycle terminal. Sa consultation régulière (notamment au moment de la recherche d'exercices et de problèmes, sous la conduite du professeur ou en autonomie) favorise à la fois la mémorisation et le développement de compétences. Le professeur doit avoir le souci de la bonne qualité mathématique et rédactionnelle des traces écrites figurant au tableau et dans les cahiers d'élèves. En particulier, il est essentiel de bien distinguer le statut des énoncés (définition, propriété - admise ou démontrée -, démonstration).

■ Organisation du programme

Le programme est structuré autour de trois parties thématiques

- ***phénomènes d'évolution** :* cette partie met en jeu des notions d'analyse (suites, fonctions, exponentielles, dérivée) ;
- ***analyse de l'information chiffrée** :* cette partie permet de consolider des notions de statistiques ;
- ***phénomènes aléatoires*** : cette partie est centrée sur la notion de probabilité conditionnelle ;

et d'une partie transversale :

- ***habiletés mathématiques de base et automatismes*** : cette partie vise à la fois à construire et à entretenir des capacités mathématiques fondamentales et à développer des réflexes intellectuels. Le programme a pour ambition de développer ces habiletés dans les domaines du calcul (numérique et algébrique), de la lecture et la production de graphiques et du traitement des données.

Ces parties assurent, dans une nouvelle dynamique de parcours, la continuité entre l'enseignement commun de seconde et l'enseignement optionnel *Mathématiques complémentaires*. Chaque partie thématique est introduite par un propos qui suggère des pistes didactiques et pédagogiques possibles pour introduire les contenus mathématiques, organiser la différenciation pédagogique et réconcilier certains élèves avec les mathématiques. Elle est ensuite organisée selon deux colonnes : *Exemples de situations et de problèmes* et *Contenus mathématiques* avant d'être conclue par une énumération des capacités attendues. **Seuls sont exigibles des élèves les contenus mathématiques de la colonne de droite, mobilisés dans les capacités attendues**.
Les exemples de situations et de problèmes prennent appui sur les disciplines enseignées au lycée, mais aussi sur la vie quotidienne et sur la vie citoyenne. Donnés à titre indicatif, ils peuvent, selon le choix de l'enseignant, motiver l'introduction des notions mathématiques étudiées ou les illustrer. **Ils n'ont aucun caractère prescriptif et n'ont en aucun cas à être abordés de manière exhaustive. Le professeur a l'entière liberté de choisir d'autres situations ou d'autres problèmes.** Enfin, pour développer le plaisir de pratiquer des mathématiques dans un cadre un peu moins formel, des exemples de questions-défis sont proposés à la fin de chaque partie.

Contenus d'enseignement

■ Phénomènes d'évolution

Cette partie est consacrée à la présentation de notions mathématiques permettant de modéliser des phénomènes en évolution : les suites, qui modélisent des grandeurs dont l'évolution est discrète, et les fonctions, qui modélisent des grandeurs dont l'évolution est continue.
L'objectif est d'appréhender deux modèles classiques d'évolution, la croissance linéaire et la croissance exponentielle, sans toutefois exclure, dans le cadre de la différenciation, la présentation d'autres modèles.
La compréhension, la comparaison et l'interrogation critique sur la validité des modèles étudiés permettent de développer des capacités de raisonnement et d'argumentation. Leur mise en pratique, tant dans des situations internes qu'externes aux mathématiques, permet quant à elle de consolider des habiletés en matière de calcul, d'analyse et de production de graphiques ainsi que dans l'utilisation d'outils numériques.

Le choix de présenter, à l'intérieur des deux modèles de croissance retenus, d'abord les suites puis les fonctions, correspond à la démarche mathématique générale du passage du discret au continu, explicitée dans la sous-partie consacrée à la croissance exponentielle.
Les deux modes de génération d'une suite, explicite et par récurrence, peuvent être introduits lors de la résolution de problèmes. On peut, par exemple, prendre appui sur des *Nombres figurés*, ou sur un contexte historique, comme le problème de remboursement d'une dette posé par Euler dans *Introduction à l'analyse infinitésimale*.
Lors des premières modélisations d'une grandeur discrète par une suite, on veille à utiliser la notation fonctionnelle $u(n)$, préalablement à la notation indicielle u_n. Dans le cadre d'une évaluation différenciée, cette dernière notation peut ne pas être exigible de tous les élèves, même en fin d'apprentissage.

Croissance linéaire

Les suites arithmétiques et les fonctions affines modélisent des grandeurs discrètes ou continues dont le taux de variation est constant. Les fonctions affines, déjà étudiées en classe de seconde, peuvent faire l'objet d'un travail succinct. Le parallèle est fait entre le sens de variation des fonctions affines et celui des suites arithmétiques.

Exemples de situations et de problèmes	Contenus mathématiques
Formation du citoyen Éducation budgétaire et financière (placement à intérêts simples, croissance d'un poste budgétaire). **Mathématiques** Motifs géométriques évolutifs (en anglais *patterns*) : motifs géométriques en forme de T ou de croix, carré bordé.	**Suites arithmétiques** Définition ; relation de récurrence. Sens de variation. Représentation graphique : nuage de points $(n, u(n))$.
Physique - Pression de l'eau exercée sur un plongeur en fonction de sa profondeur. - Correspondance entre degrés Celsius et Fahrenheit. **Économie** Modélisation de l'offre et de la demande par des fonctions affines, point d'équilibre. **Vie quotidienne, formation du citoyen** Modélisation du barème de l'impôt sur le revenu par une fonction affine par morceaux (taux marginal, taux moyen).	**Fonctions affines** L'objectif est de remobiliser les connaissances abordées en classe de seconde : représentation graphique, sens de variation, lien entre le taux d'accroissement et le coefficient directeur de la droite représentative.

Sciences de la vie et de la Terre - Modèle affine de White : lien entre la température globale moyenne annuelle à la surface de la Terre et la concentration de dioxyde de carbone dans l'atmosphère. - Modèle linéaire de l'évolution du niveau moyen des océans.	

Capacités attendues

- Reconnaître un phénomène discret ou continu dont l'accroissement relatif (ou taux d'accroissement) est constant et le modéliser mathématiquement.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite arithmétique définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite arithmétique ou d'une fonction affine.
- Déterminer un seuil par le calcul ou à l'aide d'une représentation graphique.

Croissance exponentielle

Les suites géométriques modélisent des grandeurs discrètes dont la variation absolue $u(n+1)-u(n)$ correspondant à une incrémentation d'une unité est proportionnelle à la valeur courante u(n).
Les fonctions exponentielles modélisent des grandeurs dont la variation instantanée $f'(x)$ est proportionnelle à la valeur courante $f(x)$. La notion d'équation différentielle ne figurant pas au programme, les fonctions exponentielles sont présentées comme prolongement à des valeurs non entières positives des suites géométriques de raison positive. Une démarche différenciée est recommandée pour cette introduction.
Dans ce cadre, il est possible, au choix :

- de se limiter au recours à la calculatrice pour obtenir la valeur de a^x pour tout réel positif x ;
- de « compléter » à la main le nuage de points représentant une suite géométrique pour obtenir la courbe d'une fonction continue ;
- d'ajouter des « points intermédiaires » à ce nuage par dichotomies successives (moyenne arithmétique des abscisses et moyenne géométrique des ordonnées) à l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de programmation. Cette démarche suppose que les moyennes arithmétique et géométrique aient été définies en amont ;
- de commencer par définir la racine n-ième d'un réel positif, puis de construire les puissances à exposant rationnel positif afin de conserver les propriétés des fonctions puissances entières étudiées en seconde.

Les propriétés algébriques des fonctions exponentielles sont admises, par extension des propriétés des puissances entières.
Le parallèle est fait entre le sens de variation des fonctions exponentielles et celui des suites géométriques.

Exemples de situations et de problèmes	Contenus mathématiques
Problème Dans une mare, le nombre de lentilles d’eau double chaque jour. À partir d’une lentille, il faut trente jours pour recouvrir la mare. Combien en faut-il à partir de deux lentilles pour? **Sciences de la vie et de la Terre** - Modèle d’élimination d’un médicament dans le sang. - Évolution d’une population : cas des espèces invasives. **Mathématiques** Motifs géométriques évolutifs (en anglais *patterns)* : par exemple le triangle de Sierpinski. **Physique et sciences de la vie et de la Terre** Demi-vie d’un élément radioactif ou d’une substance présente dans un système biologique. Nombre d’éléments radioactifs restant dans un échantillon au bout d’un nombre entier de demi-vies. **Formation du citoyen** Éducation budgétaire et financière : emprunt, placement à intérêts composés, gestion d’une dette, croissance d’un poste budgétaire. **Sciences de l’ingénieur** Doublement du nombre de transistors présents sur une puce tous les deux ans : loi de Moore. **Exemple de question-défi** Une population dont l’accroissement est exponentiel alors que celui des ressources alimentaires dont elle dispose est linéaire (modèles de Malthus) pourra-t-elle éviter une famine ?	**Suites géométriques à termes strictement positifs** Définition ; relation de récurrence. Sens de variation en fonction de la raison. Représentation graphique du nuage de points $(n, u(n))$.

Problème Quelle est la valeur d'un capital placé à intérêts composés à taux annuel constant au bout d'une fraction d'annuité ? **Sciences sociales et vie citoyenne** Modélisation simplifiée de la propagation d'une rumeur (cascades verticales). **Physique et sciences de la vie et de la Terre** Nombre de noyaux radioactifs présents dans un échantillon au bout d'une fraction de demi-vie. Concentration d'une substance présente dans un système biologique au bout d'une fraction de demi-vie. **Exemple de question défi** Pourquoi, lors d'une épidémie de Covid, est-il important que le taux de reproduction R_0 du virus soit strictement inférieur à 1 ?	Fonctions exponentielles Propriétés algébriques (admises, par extension des propriétés des puissances entières). Variations. Représentation graphique. Cas particulier de l'exposant $1/n$. Taux d'évolution moyen correspondant à n évolutions successives.

Capacités attendues

- Reconnaître si une situation, discrète ou continue, relève d'un modèle de croissance exponentielle.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite géométrique définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Calculer un taux d'évolution moyen.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite géométrique ou d'une fonction exponentielle.
- Déterminer un seuil par le calcul, à l'aide d'une représentation graphique ou en utilisant un outil numérique (calculatrice, logiciel de géométrie dynamique, tableur, logiciel de programmation).

Variation instantanée

L'évolution instantanée d'une grandeur qui dépend d'une autre est un concept délicat à percevoir de manière intuitive dans la mesure où la variation absolue instantanée de chacune d'elle est nulle. Il existe cependant une notion mathématique permettant de modéliser un tel phénomène : le nombre dérivé. L'introduction de celui-ci peut se faire de plusieurs manières, notamment dans le cadre de la différenciation. Deux démarches introductives possibles sont présentées ci-dessous de manière explicite :

- la première démarche, uniquement fondée sur l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, consiste à visualiser la position limite des sécantes passant par un point de la courbe d'équation $y = f(x)$ et à définir d'abord la tangente en ce point, puis le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente ;
- dans la seconde démarche, en lien avec la physique, la notion de nombre dérivé est introduite à partir de celle, plus intuitive, de vitesse instantanée d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne, en ayant recours à l'articulation des fonctionnalités graphique et calculatoire d'un logiciel de géométrie

dynamique. Sur un exemple concret, la vitesse instantanée à un instant donné est approchée, grâce au tableur, par des vitesses moyennes calculées entre cet instant et des instants de plus en plus proches de lui. Ces vitesses ayant été interprétées comme coefficients directeurs de sécantes à la courbe représentant la distance parcourue en fonction du temps, la visualisation dynamique de la position limite des sécantes (tangente) permet de définir la vitesse instantanée comme le coefficient directeur de la tangente. La notion de nombre dérivé est ensuite étendue, de manière générale, à une grandeur y dépendant d'une grandeur x par une relation du type $y = f(x)$. La notion de limite est abordée sans aucun formalisme.

Dans beaucoup de situations externes aux mathématiques, une variation absolue $f(x+1) - f(x)$ correspondant à une incrémentation d'une unité, qui est aussi un taux de variation, est modélisée par le nombre $f'(x)$ pour de « grandes » valeurs de x.
Au titre de la sensibilisation des élèves sur la place des mathématiques dans l'histoire des sciences, le professeur peut évoquer la controverse historique entre Leibniz et Newton autour du calcul infinitésimal. Il peut aussi, devant certains élèves, expliquer l'intérêt, dans les disciplines autres que les mathématiques, d'utiliser la notation de Leibniz dy/dx, qui exprime un nombre dérivé comme un taux de variation infinitésimal.

Exemples de situations et de problèmes	Contenus mathématiques
Problème Comment estimer au mieux la vitesse, lors de son impact au sol, d'une bille lâchée en chute libre et sans vitesse initiale du haut d'une tour ? **Chimie** Vitesse d'apparition d'un produit ou de disparition d'un réactif dans une réaction chimique. **Économie** Le coût marginal défini comme la variation du coût total induite par la production d'une unité supplémentaire, et modélisé par la dérivée du coût total. Comparaison avec le coût moyen de production et de vente. **Physique** La puissance électrique définie comme l'énergie électrique échangée au cours d'une seconde, et modélisée par la dérivée de l'énergie par rapport au temps. **Exemple de question-défi** Un automobiliste peut-il être verbalisé pour excès de vitesse par un radar fixe alors qu'il ne l'a pas été par un « radar-tronçon » ? Et l'inverse ?	Tangente à une courbe en un point. Nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente. Équation réduite de la tangente.

Capacités attendues

- Interpréter un nombre dérivé comme un taux de variation instantanée et comme un modèle mathématique d'une variation absolue correspondant à une incrémentation d'une unité.
- Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- Construire la tangente à une courbe en un point.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.

Variation globale

Une manière d'étudier l'évolution globale d'une fonction sur un intervalle repose sur l'établissement de son tableau de variation.
Pour ce faire, on commence par passer de la notion instantanée de nombre dérivé à celle, globale, de fonction dérivée.
Une analyse de la courbe représentative de la fonction permet de relier les variations de celle-ci avec le signe des coefficients directeurs de ses tangentes, donc de sa fonction dérivée.
À partir des formules de dérivation des fonctions carré et cube (fournies à certains élèves et démontrées par d'autres, dans le cadre de la différenciation) et des règles opératoires sur les dérivées, les élèves sont amenés à calculer des dérivées de fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à trois. Pour des valeurs adéquates des coefficients, ces fonctions, qui ont une croissance rapide au début, plus lente ensuite et à nouveau plus rapide, modélisent des coûts de production.
Une démarche différenciée peut conduire à aborder des situations d'optimisation : à titre culturel, elles peuvent être simplement mentionnées par des considérations sur les formes optimales rencontrées dans la nature et la vie quotidienne : la forme des alvéoles de cire construites par les abeilles, la forme des bulles de savon, la taille des organismes monocellulaires, les dimensions des casseroles et des boites de conserve, le profil d'une piste de planche à roulettes (skate-board) ; ces objets aussi disparates sont tous régis par la même nécessité : celle d'optimiser une grandeur. L'évocation de ces exemples permet à la fois de révéler la présence, souvent invisible, des mathématiques dans le monde dans lequel nous vivons et d'illustrer, non seulement la « déraisonnable efficacité des mathématiques » décrite dans un texte célèbre par le physicien Eugène Wigner, mais aussi leur incroyable universalité. Des exemples de ce type peuvent peut-être réconcilier avec les mathématiques certains élèves, notamment des jeunes filles, ayant une vision soit totalement « désincarnée », soit purement techniciste, des mathématiques.
Parmi les outils mathématiques permettant de traiter des problèmes d'optimisation, l'un des plus simples et des plus efficaces est le signe de la fonction dérivée. Pour identifier un extremum, la seule analyse du tableau de variation suffit, sans nécessiter la présentation de nouveaux apports théoriques.
L'exigence de technicité au niveau des calculs peut être différenciée, notamment par le recours à un logiciel de calcul formel, soit pour obtenir ou factoriser des dérivées, soit pour résoudre des problèmes mettant en jeu des fonctions sortant du cadre des contenus mathématiques exigibles.

Exemples de situations et de problèmes	Contenus mathématiques
Problème On suppose qu'un coût total correspondant à la production de x unités commerciales est modélisé par une fonction du type $C(x) = x^3 - 12x^2+60x$.	Fonction dérivée. Dérivées des fonctions carré et cube.

Comment démontrer que le coût moyen de production $C(x)/x$ est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal $C'(x)$? **Sciences et vie de la Terre** Courbes de croissance (enfants, animaux, végétaux, bactéries, levures). **Physique** : Minimisation de l'énergie électrique dissipée par effet Joule dans un réseau. **Mathématiques** Étude de courbes de tendance (polynomiales ou exponentielles) obtenues à l'aide d'un tableur pour modéliser l'évolution globale d'une grandeur à partir de données réelles. **Exemples de questions-défis** - Pourquoi la hauteur des casseroles est-elle égale à leur rayon ? - Le problème du sauvetage en mer emprunté à Richard Feynman : Où un touriste situé sur la plage doit-il entrer dans l'eau pour minimiser le temps nécessaire pour sauver un nageur en difficulté ?	Dérivée d'une somme, du produit par un nombre réel. Application à la dérivée d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 Sens de variation d'une fonction ; lien avec le signe de la dérivée. Tableau de variation.

Capacités attendues

- Calculer la dérivée d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à trois.
- Déterminer le sens de variation d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à trois.

■ Analyse de l'information chiffrée

L'analyse de l'information chiffrée portant sur des problématiques d'actualité (développement durable, changement climatique, biodiversité, économie, démographie, santé publique, etc.) permet d'éclairer les élèves sur certains débats actuels et de développer leur sens critique.
En prolongement du programme de seconde dans lequel ont été introduits des indicateurs utiles pour l'analyse d'un unique caractère statistique et au titre d'une première sensibilisation aux bases de données, cette partie aborde l'analyse statistique bivariée.
Les possibilités aujourd'hui offertes par l'informatique permettent le stockage et la manipulation de données massives. Certaines données, les données ouvertes (en anglais *open data*), sont disponibles sur ceux des sites institutionnels accessibles à tous comme ceux de l'INSEE, de l'Ined ou dans le catalogue data.gouv des données de l'administration. D'autres figurent dans des rapports publics comme ceux du GIEC. Ces données, issues de l'observation de plusieurs caractères (indicateurs de santé, indicateurs économiques ; température, niveau des océans, proportion de gaz à effet de serre ; etc.) et consignées dans des tableaux de grande taille peuvent être traitées grâce à des outils numériques de calcul et de représentation graphique.

Dans le cadre de la différenciation, les élèves peuvent utiliser un tableur ou un logiciel de programmation pour étudier les éventuelles relations entre deux caractères. De même, il peut être proposé uniquement à certains élèves, de déterminer, dans un fichier de données, un sous-ensemble d'individus correspondant à un sous-caractère (filtrage, utilisation des connecteurs ET, OU, NON).

Toujours dans le cadre de la différenciation et afin de renforcer les liens avec les autres disciplines, certaines données étudiées peuvent provenir de documents issus d'autres enseignements dispensés au lycée (enseignement scientifique, éducation morale et civique, enseignements de spécialité).

Exemples de situations et de problèmes	Contenus mathématiques
Exemples d'analyse croisée de deux caractères à partir d'un fichier de données.	Tableau croisé d'effectifs. Représentations graphiques adaptées à l'analyse croisée de deux caractères (nuage de points, diagrammes en barres, diagrammes circulaires).

Capacités attendues

- Dresser un tableau croisé de deux caractères à partir d'un fichier de données.
- Utiliser un tableur pour représenter des données sous forme de tableau ou de diagramme.

■ Phénomènes aléatoires

L'analyse statistique bivariée étudiée dans la partie précédente permet d'introduire naturellement la notion de fréquence conditionnelle. Or, une fréquence est en fait une probabilité dans le cadre du tirage aléatoire d'un individu au sein d'une population finie, selon la loi uniforme étudiée en classe de seconde.
Dans le cadre de la différenciation, le professeur s'appuie sur la notion de fréquence conditionnelle pour introduire, uniquement devant certains élèves, la notion de probabilité conditionnelle. Les arbres de probabilité constituent un outil de représentation particulièrement efficace pour traiter des situations y faisant appel, les pondérations de chaque branche étant interprétées en termes de probabilités conditionnelles.
La notion de probabilité conditionnelle permet d'introduire de manière intuitive celle de l'indépendance : deux événements A et B sont dits indépendants si la probabilité conditionnelle de A sachant B est égale à la probabilité de A (sous réserve de la non-nullité de celle de B).
Grâce à des outils numériques, on simule une succession de tirages aléatoires indépendants afin de poursuivre l'approche vulgarisée de la loi des grands nombres initiée en classe de seconde.
La possibilité de présenter des problèmes simples relatifs à des jeux de hasard datant du XVIII^{e} siècle confère à cette partie une dimension historique.

Exemples de situations et de problèmes	Contenus mathématiques
Problème Le problème du Grand duc de Toscane, fondé sur l'étude du jeu du « Passe-dix ». **Sciences et vie de la Terre et vie quotidienne** Tests médicaux : faux positifs et faux négatifs. **Vie citoyenne** Sondage avant une élection. **Mathématiques** Modélisation ou simulation de jeux simples : pile ou face, jeu de *Croix ou pile* de d'Alembert, jeux d'argent, jeu de *pierre-feuille-ciseaux*, jeu du lièvre et de la tortue, etc. Simulation de tirages avec remise dans une urne. **Exemples de questions-défis** - Comment traduire, en utilisant le langage des probabilités, la lettre écrite par Fermat à Pascal en 1654 au sujet du problème des partis, également connu sous le nom de *paradoxe du chevalier de Méré* ? - Existe-t-il une stratégie gagnante au jeu de Monty Hall ?	Fréquence conditionnelle, fréquence marginale. Probabilité conditionnelle : définition, notation, calcul à partir d'un tableau croisé d'effectifs ou d'un arbre de probabilités. Indépendance de deux événements. Succession d'événements indépendants, équiprobables ou non.

Capacités attendues

- Construire un tableau croisé d'effectifs ou un arbre de probabilité associé à un phénomène aléatoire.
- Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales à partir d'un tableau croisé d'effectifs.
- Interpréter un tableau croisé en utilisant des fréquences conditionnelles.
- Calculer des probabilités conditionnelles à l'aide d'un tableau croisé d'effectifs ou d'un arbre pondéré.

■ Habiletés mathématiques de base et automatismes

Cette partie du programme vise à construire et à entretenir des habiletés mathématiques (connaissances, procédures et stratégies) dans les domaines du calcul, des représentations graphiques et du traitement des données. Il s'agit à la fois de garantir un socle de connaissances et de compétences mathématiques fondamentales nécessaires à tout citoyen et d'asseoir des réflexes intellectuels permettant aux élèves, dans l'immédiat, de s'engager avec succès dans la résolution de problèmes, au cœur de cet enseignement et, à terme, de favoriser la réussite de leurs études supérieures.

Sans faire l'objet d'un chapitre d'enseignement spécifique, le développement des capacités énoncées ci-dessous requiert un entraînement régulier tout au long de l'année, par exemple lors d'activités ritualisées de début de séance sous forme de *questions flash*, privilégiant l'activité mentale et la verbalisation des procédures.
Il convient de s'appuyer sur des situations simples pour ne pas occulter l'objectif d'apprentissage par des difficultés inhérentes à la compréhension du support.
Les activités visant l'acquisition d'automatismes fournissent par ailleurs des conditions de réussite rapide et mettent les élèves en confiance, ce qui peut contribuer à la réconciliation de certains, notamment les jeunes filles, avec les mathématiques.

Calcul numérique et algébrique

- effectuer mentalement des calculs simples mettant en jeu des nombres décimaux, des fractions et des pourcentages ;
- passer d'une écriture d'un nombre à une autre (décimale, fractionnaire, sous forme de pourcentage) ;
- repérer un nombre rationnel sur une droite graduée ; repérer un point dans le plan muni d'un repère orthogonal ;
- utiliser un ordre de grandeur pour contrôler un résultat ;
- effectuer une application numérique d'une formule mathématique (longueurs, aires, volumes) ou d'une formule simple provenant d'une autre discipline ;
- résoudre une équation du premier degré du type $ax+b = cx+d$ ou $a/x=b$ ou une équation du second degré du type $x^2=a$.

Représentations graphiques

- lire sur un graphique les coordonnées d'un point, les variations d'une grandeur : croissance ou décroissance, doublement régulier, accélération ou ralentissement de la croissance ;
- préciser sur un graphique les grandeurs en jeu, les unités et les échelles ;
- estimer graphiquement une valeur atteinte, un antécédent, un seuil.

Traitement de données

- appliquer un pourcentage d'augmentation ou de diminution ;
- calculer un taux d'évolution global à partir de taux d'évolution successifs. Calculer un taux d'évolution réciproque.