Exercices d'entraînement

pour le bac 2024

Spécialités Mathématiques

Disponible sur Mathweb.fr

Exercice 1.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2 + (2 - x)\mathrm{e}^x.$$

1. Calculer $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
2. Montrer que $g'(x) = (1 - x)\mathrm{e}^x$.
3. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   On admettra que $\alpha \approx 2,218$.
5. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + \mathrm{e}^x}.$$

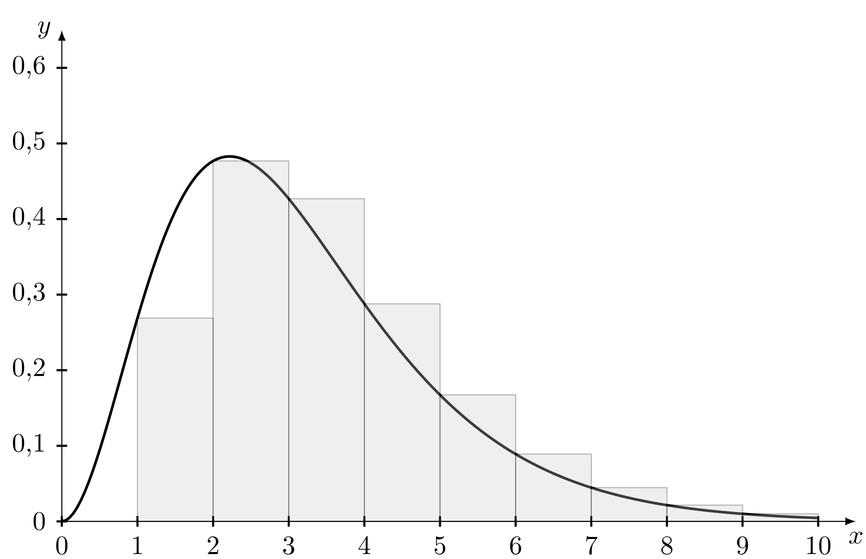
1. (a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
   (b) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha(\alpha - 2)$, où α est l'unique solution à l'équation $g(x) = 0$ introduite dans la partie A.
3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\left(1 + \mathrm{e}^x\right)^2}$.
4. Dresser alors un tableau complet des variations de f sur $\mathbb{R}$.

Partie C

On cherche à déterminer une valeur approchée au dixième de $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour cela, on divise l'intervalle $[0\,;10]$ en n segments de même longueur.

Sur chaque segment $\left[\dfrac{10k}{n}\,;\dfrac{10(k+1)}{n}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{10k}{n}\right)$, où k est un entier compris entre 0 et $n - 1$, comme l'illustre le schéma ci-dessous :



Cas pour $n = 10$.

On note A_k l'aire du rectangle de hauteur $f\left(\frac{10k}{n}\right)$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
On pose u_n l'aire totale des rectangles ainsi construit, pour tout entier naturel n.

1. Montrer que pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$A_k = \frac{1\ 000k^2}{n^3} \times \frac{1}{1+\mathrm{e}^{10k/n}}.$$

2. Justifier alors que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1\ 000}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{1+\mathrm{e}^{10k/n}}.$$

3. On considère le programme suivant, écrit en Python :

```
from math import exp

def u(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + k*k / (1+exp(10*k/n))

    return 1000*s / n**3
```

   (a) Que représente la valeur retournée par `u(20)` ?

   (b) La console Python affiche ce qui suit :

```
>>> u(20)
1.796204716686941

>>> u(100)
1.797316453361196

>>> u(10000)
1.7975444069876976
```

   Que peut-on en déduire ?

4. Modifier la fonction `u` précédente en une fonction `u(n,a)` afin qu'elle puisse retourner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$, avec $a > 0$, pour un n donné.

```
from math import exp

def u(n,a):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + k*k / (1+exp( ... ))

    return ... *s / n**3
```

Exercice 2.

Partie A

Monsieur Barnabé Baie vend des coffrets d'assortiments de chocolats.
Parmi ses clients, il compte Madame Cassiopée Paix.
En fonction de ses observations,

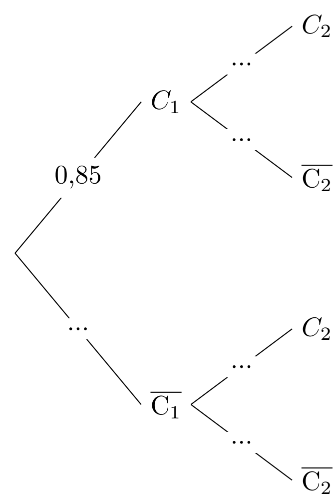
- il estime qu'elle va lui commander un coffret la semaine prochaine avec une probabilité de 0,85 ;
- si elle lui commande un coffret une semaine, la probabilité qu'elle lui en commande un la semaine suivante est égale à 0,85 ;
- si elle ne lui commande pas de coffret une semaine, la probabilité qu'elle le fasse la semaine suivante est égale à 0,95.

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on note :

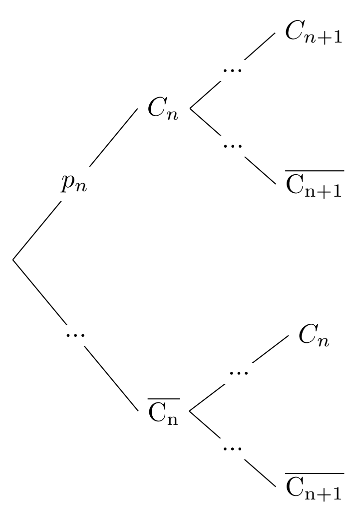
- C_n l'événement : « Mme Paix commande un coffret la n-ième semaine » ;
- p_n la probabilité que Mme Paix commande un coffret lors de la n-ième semaine.

On convient de noter $p_1 = 0,85$ la probabilité qu'elle commande un coffret la semaine prochaine.

1. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Montrer que $p_2 = 0,865$.
3. Compléter l'arbre de probabilités suivant, pour $n > 1$:



4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,95 - 0,1p_n$.

Partie B

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = p_n - \frac{19}{22}.$$

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire que pour tout entier naturel n,

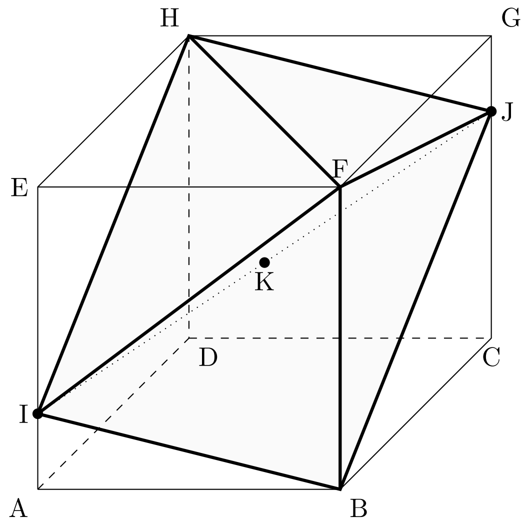
$$p_n = \frac{19}{22} - \frac{3}{220} \times \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

3. Quelle est la probabilité pour qu'à très longs termes, Mme Paix commande un coffret à M. Baie ?

Exercice 3.

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. Soit k un réel quelconque.
On considère les points I, J et K tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} \quad ; \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CG} \qquad \overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IJ}.$$



On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Justifier qu'une représentation paramétrique de (IJ) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Déterminer la position du point K pour que H, K et B sont alignés.
4. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJB) est $x - 3y + 4z - 1 = 0$.
5. (a) Montrer que la distance du point F au plan (IJB) est égale à $\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$.

   (b) Montrer que $IBJH$ est un parallélogramme. Est-il un rectangle ?

   (c) On rappelle la *Loi des sinus* :

   Dans un triangle ABC d'aire S, $\dfrac{1}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{AB \times AC}{2S}$.

   En déduire une valeur approchée du volume de la pyramide $FIBJH$ au centième.

Exercice 4.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple : pour chacune des questions, vous devez trouver la proposition correcte parmi les quatre propositions qui sont proposées.

1. On contrôleur de qualité prend au hasard n objets fabriqués par une chaîne de production. On estime que la production est assez importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
   La probabilité qu'un objet soit défectueux est estimée à 0,019.

   (a) Dans cette question, $n = 50$. La probabilité qu'il y ait au moins un dixième d'objets défectueux est :

0,002 5	0,002 6	0,999 6	0,997 4

   (b) Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité qu'il ait au moins un objet défectueux soit supérieure à 0,999 9 ?

479	480	481	482

2. Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\ln(x^2+1)$ est :

   $F_1(x) = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$ $\qquad$ $F_3(x) = \left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)+1$

   $F_2(x) = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\ln\left(x^2+1\right)-1\right]$ $\qquad$ $F_4(x) = \left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)-1$

3. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2-3x+2)\mathrm{e}^x$ admet :

   Aucun point d'inflexion $\qquad$ Deux points d'inflexion

   Un point d'inflexion $\qquad$ Trois points d'inflexion

Correction

Disponible sur Mathweb.fr

Exercice 1.

Partie A

1. • $g(x) = 2 + 2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \text{ (cours)} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0 \text{ (par croissance comparée)}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = 2} \text{ (par somme).}$$

• $$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \text{ (cours)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty} \text{ (par somme et produit).}$$

2. En posant $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 + (u'v + uv')(x) \\ &= -\mathrm{e}^x + (2-x)\mathrm{e}^x \\ &= (1-x)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

3. $g'(x)$ est du signe de $(1-x)$ car $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$. On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$2+\mathrm{e}$	$\searrow$	$-\infty$

4. Sur $]-\infty\,;1[$, g est continue, strictement croissante, et prend ses valeurs sur $]2\,;2+\mathrm{e}[$.
Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur $]1\,;+\infty[$, g est continue et strictement décroissante, et prend ses valeurs sur $]-\infty\,;2+\mathrm{e}[$, dans lequel se trouve 0.
Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha \in\,]1\,;+\infty[$ pour laquelle $g(\alpha) = 0$.

Finalement, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$: $x = \alpha$.

5. De ce qui précède, on déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1. (a) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\mathrm{e}^x\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)} = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0 \text{ (par croissance comparée)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

2. On sait que $g(\alpha) = 0$ d'après la partie A.

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\iff 2 + (2-\alpha)\mathrm{e}^{\alpha} = 0 \\ &\iff (2-\alpha)\mathrm{e}^{\alpha} = -2 \\ &\iff \mathrm{e}^{\alpha} = \frac{-2}{2-\alpha} \\ &\iff \mathrm{e}^{\alpha} = \frac{2}{\alpha - 2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{1+\mathrm{e}^{\alpha}} \\ &= \frac{\alpha^2}{1 + \frac{2}{\alpha-2}} \\ &= \frac{\alpha^2}{\frac{\alpha-2+2}{\alpha-2}} \\ &= \frac{\alpha^2(\alpha-2)}{\alpha} \\ &= \alpha(\alpha-2). \end{aligned}$$

3. En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = 1 + \mathrm{e}^x$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(u'v - v'u)(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{2x\big(1+\mathrm{e}^x\big) - x^2\mathrm{e}^x}{\big(1+\mathrm{e}^x\big)^2} \\ &= \frac{x\big(2 + 2\mathrm{e}^x - x^2\big)}{\big(1+\mathrm{e}^x\big)^2} \\ &= \frac{xg(x)}{\big(1+\mathrm{e}^x\big)^2}. \end{aligned}$$

4. De la question 5 de la partie A, on déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\alpha(\alpha-2)$	$\searrow$	0

Partie C

1. Si on divise $[0\,;10]$ en n intervalles de même amplitude, alors chaque rectangle sur $\left[\frac{10k}{n}\,;\frac{10(k+1)}{n}\right]$ aura une largeur égale à $\frac{10}{n}$ et une longueur (une hauteur) de $f\left(\frac{10k}{n}\right)$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. L'aire A_k de ce rectangle est donc :

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{10}{n} \times f\left(\frac{10k}{n}\right) \\ &= \frac{10}{n} \times \frac{\left(\frac{10k}{n}\right)^2}{1 + \mathrm{e}^{10k/n}} \\ &= \frac{10}{n} \times \frac{10^2k^2}{n^2} \times \frac{1}{1+\mathrm{e}^{10k/n}} \\ &= \frac{1\ 000k^2}{n^3} \times \frac{1}{1+\mathrm{e}^{10k/n}}. \end{aligned}$$

2. De ce dernier résultat, on déduit que la somme des aires des rectangles est :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1\ 000k^2}{n^3} \times \frac{1}{1+\mathrm{e}^{10k/n}} \\
&= \frac{1\ 000}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{1+\mathrm{e}^{10k/n}}.
\end{aligned}$$

(nous avons pu sortir $\dfrac{1\ 000}{n^3}$ de la somme car cette fraction ne dépend pas de k).

3.
   - La fonction `u(n)` calcule le terme u_n, qui représente la somme des aires des rectangles quand on divise $[0\,;10]$ en n intervalles de même amplitude.
     Ainsi, `u(20)` représente cette somme lorsque l'on divise $[0\,;10]$ en 20.
   - Plus on divise $[0\,;10]$, plus les rectangles vont avoir une largeur petite. La somme des aires des rectangles va donc se rapprocher de $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\ \mathrm{d}x$.
     On peut alors déduire des résultats obtenus dans la console Python qu'une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\ \mathrm{d}x$ au dixième est 1,8.
   - Le programme complété est le suivant :

```
from math import exp

def u(n,a):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + k*k / (1+exp( 1+exp(a*k/n) ))

    return (a**3)*s / n**3
```

En effet, chaque subdivision de $[0\,;a]$ a pour amplitude $\dfrac{a}{n}$ et chaque intervalle sera de la forme $\left[\dfrac{ak}{n}\,;\dfrac{a(k+1)}{n}\right]$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{a}{n} \times f\left(\frac{ak}{n}\right) \\
&= \frac{a}{n} \times \frac{\left(\frac{ak}{n}\right)^2}{1+\mathrm{e}^{ak/n}} \\
&= \frac{a}{n} \times \frac{a^2k^2}{n^2} \times \frac{1}{1+\mathrm{e}^{ak/n}} \\
&= \frac{a^3k^2}{n^3} \times \frac{1}{1+\mathrm{e}^{ak/n}}.
\end{aligned}$$

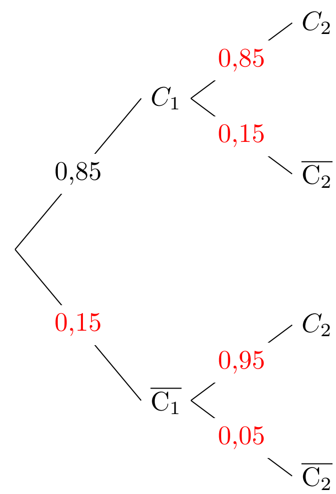
D'où :

$$u_n = \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{1+\mathrm{e}^{ak/n}}.$$

Exercice 2.

Partie A

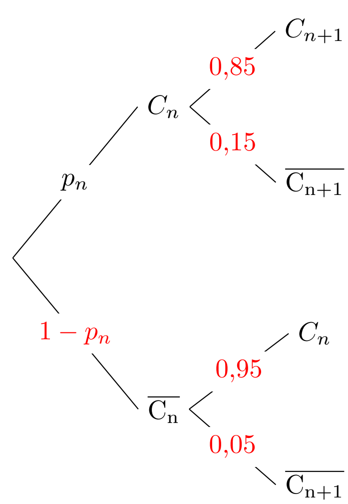
1. D'après les informations données par l'énoncé, on a :



2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \times P_{C_1}(C_2) + (1 - p_1) \times P_{\overline{C_1}}(\overline{C_2}) \\ &= 0,85 \times 0,85 + 0,15 \times 0,95 \\ &\boxed{p_1 = 0,865} \end{aligned}$$

3. D'après les informations données par l'énoncé, on a :



4. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \times P_{C_n}(C_{n+1}) + (1 - p_n) \times P_{\overline{C_n}}(\overline{C_{n+1}}) \\ &= p_n \times 0,85 + (1 - p_n) \times 0,95 \\ &= 0,85p_n + 0,95 - 0,95p_n \\ &\boxed{p_{n+1} = 0,95 - 0,1p_n} \end{aligned}$$

Partie B

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = p_n - \frac{19}{22}.$$

1. $$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{19}{22} \\ &= 0,95 - 0,1p_n - \frac{19}{22} \\ &= \frac{95}{100} - \frac{1}{10}p_n - \frac{19}{22} \\ &= -\frac{1}{10}p_n + \frac{19}{20} - \frac{19}{22} \\ &= -\frac{1}{10}p_n + \frac{19}{220} \\ &= -\frac{1}{10}\left(p_n - \frac{19}{22}\right) \\ &= -0,1u_n. \end{aligned}$$

   La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = -0,1$; son premier terme est :

   $$u_1 = u_1 - \frac{19}{22} = \frac{85}{100} - \frac{19}{22} = -\frac{3}{220}.$$

2. De la question précédente, on déduit que pur tout entier $n \geqslant 1$:

   $$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{3}{220} \times \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

   Or, $u_n = p_n - \frac{19}{22}$ donc :

   $$p_n = u_n + \frac{19}{22} = \boxed{\frac{19}{22} - \frac{3}{220} \times \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}}.$$

3. La probabilité pour qu'à très longs termes, Mme Paix commande un coffret à M. Baie est la limite de p_n.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 - \frac{1}{10} < 1$.

   <u>Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{19}{22}$.</u>

Exercice 3.

1. On a : $I\left(0\,;0\,;\dfrac{1}{4}\right)$ et $J\left(1\,;1\,;\dfrac{3}{4}\right)$.
2. D'après le cours, une représentation paramétrique de la droite (IJ) est :

$$\begin{cases} x = x_I + \alpha t \\ y = y_I + \beta t \\ z = z_I + \gamma t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

   où $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ sont les coordonnées d'un vecteur directeur de (IJ).

   Or, un vecteur directeur de (IJ) est ; $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \\ z_J - z_I \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   Une représentation paramétrique de (IJ) est donc :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B\,(1\,;0\,;0)$ donc une représentation paramétrique de (BH) est :

$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = -t' \\ z = -t' \end{cases} \quad , \quad t' \in \mathbb{R}.$$

   On souhaite que (BH) et (IJ) se coupent en K. Il faut donc que :

$$\begin{cases} 1 + t' = t \\ -t' = t \\ -t' = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + t' = -t' \\ -t' = t \\ -t' = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(-t') \end{cases} \iff \begin{cases} t' = -\frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   En remplaçant, par exemple, t par $\frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de (IJ), on trouve alors $K\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.
   K est donc le centre du cube.
4.
   - $x_I - 3y_I + 4z_I - 1 = 0 - 3 \times 0 + 4 \times \frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0\,;$
   - $x_J - 3y_J + 4z_J - 1 = 1 - 3 \times 1 + 4 \times \frac{3}{4} - 1 = -2 + 3 - 1 = 0\,;$
   - $x_B - 3y_B + 4z_B - 1 = 1 - 3 \times 0 + 4 \times 0 - 1 = 1 - 1 = 0.$

   Les points B, I et J appartiennent donc au plan d'équation $x - 3y + 4z - 1 = 0$.
   Or, ces trois points ne sont pas alignés, donc ils définissent bien un plan. Ce plan a donc pour équation $x - 3y + 4z - 1 = 0$.
5. (a) D'après une formule du cours, la distance du point F au plan (IJB) est :

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\ x_F - 3y_F + 4z_F - 1\ |}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2}} \\ &= \frac{|\ 1 - 3 \times 0 + 4 \times 1 - 1\ |}{\sqrt{26}} \\ &= \frac{4 \times \sqrt{26}}{\sqrt{26} \times \sqrt{26}} \end{aligned}$$

$$\boxed{d = \frac{2\sqrt{26}}{13}}$$

(b) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{HJ}$ donc $IBJH$ est un parallélogramme.
De plus,

$$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 1 - \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{16} \neq 0.$$

Donc $IBJH$ n'est pas un rectangle.

(c)
- *Calcul de l'aire du triangle IBH.*
  On sait que :
  $$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IH} = IB \times IH \times \cos \widehat{HIB} = -\frac{3}{16}$$
  donc :
  $$\cos \widehat{HIB} = \frac{-\frac{3}{16}}{IB \times IH} = \frac{-\frac{3}{16}}{\sqrt{1+\frac{1}{16}} \times \sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{3\sqrt{17}}{85}.$$
  On en déduit alors que $\widehat{HIB} \approx 98°$.
  Ainsi, d'après la loi des sinus, si S représente l'aire du triangle HIB,
  $$\frac{1}{\sin(98°)} = \frac{IB \times IH}{2S} \iff S = \frac{IB \times IH}{2\sin(98°)} \approx 0,65.$$
- *Calcul de l'aire du parallélogramme $IBJH$.*
  Par symétrie, l'aire de $IBJH$ est le double de celle du triangle HIB, soit approximativement 1,3.
- *Calcul du volume de la pyramide $FIBJH$.*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{IBJH} \times h \\ &\approx \frac{1}{3} \times 1,3 \times \frac{2\sqrt{26}}{13} \\ &\approx 0,34. \end{aligned}$$

Exercice 4.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple : pour chacune des questions, vous devez trouver la proposition correcte parmi les quatre propositions qui sont proposées.

1. On contrôleur de qualité prend au hasard n objets fabriqués par une chaîne de production. On estime que la production est assez importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

   La probabilité qu'un objet soit défectueux est estimée à 0,019.

   (a) Dans cette question, $n = 50$. La probabilité qu'il y ait au moins un dixième d'objets défectueux est : 0,002 6.

   Si on appelle X la variable aléatoire représentant le nombre d'objets défectueux, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,019$.

   On cherche alors $P(X \geqslant 5) \approx 0{,}002\ 577\ 913$.

   (b) Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité qu'il ait au moins un objet défectueux soit supérieure à 0,999 9 ? Il s'agit de 481.

   En effet, on cherche n tel que :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}999\ 9 &\iff 1 - P(X = 0) \geqslant 0{,}999\ 9 \\ &\iff 1 - (1-p)^n \geqslant 0{,}999\ 9 \\ &\iff 0,981^n \leqslant 0{,}000\ 1 \\ &\iff n\ln(0,981) \leqslant \ln(0{,}000\ 1) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}000\ 1)}{\ln(0,981)} \\ &\iff n \geqslant 480,13 \end{aligned}$$

   La plus petite valeur de n est donc 481.

2. Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\ln(x^2+1)$ est :

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right) - 1\right]$$

   Il suffit de la dériver pour constater que $F_2'(x) = f(x)$.

3. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 3x + 2)\mathrm{e}^x$ admet : 2 points d'inflexion.

   En effet, la dérivée seconde est $g''(x) = (x-1)(x+2)\mathrm{e}^x$, et s'annule en changeant de signe pour $x = -2$ et $x = 1$.