Logarithme népérien

Terminale, enseignement de spécialité

17 juin 2025

Réponses

Vous trouverez ci-dessous les réponses correctes.

1 Simplifiez l'expression suivante : $\ln(a^3b^2) - \ln(ab)$:

- [x] $\ln(a^2b)$
- [ ] $\ln(a^2b^2)$
- [ ] $\ln(a^3b)$
- [ ] $\ln(a^3b^2)$

On utilise les propriétés algébriques du logarithme népérien :

$$\ln(a^3b^2) - \ln(ab) = \ln\left(\frac{a^3b^2}{ab}\right) = \ln(a^2b).$$

2 Simplifiez l'expression suivante : $\ln\left(\frac{a^2}{b}\right) + \ln(b^2)$:

- [x] $\ln(a^2b)$
- [ ] $\ln(a^2)$
- [ ] $\ln(a^2b^2)$
- [ ] $\ln(b^2)$

On utilise les propriétés algébriques du logarithme népérien :

$$\ln\left(\frac{a^2}{b}\right) + \ln(b^2) = \ln\left(\frac{a^2}{b} \times b^2\right) = \ln(a^2b).$$

3 Simplifiez l'expression suivante : $\ln\left(\frac{a^3}{b^2}\right) - \ln\left(\frac{a}{b}\right)$:

- [ ] $\ln(a^2b)$
- [ ] $\ln(a^2b^2)$
- [x] $\ln(a^2b^{-1})$
- [ ] $\ln(a^3b^2)$

On utilise les propriétés algébriques du logarithme népérien :

$$\ln\left(\frac{a^3}{b^2}\right) - \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{a^3}{b^2} \times \frac{b}{a}\right) = \ln(a^2b^{-1}).$$

4 **Simplifiez l'expression suivante : $\ln(8) + \ln(2)$:**

- ☐ $\ln(10)$
- ☐ $\ln(6)$
- ☑ $\ln(16)$
- ☐ $\ln(4)$

On utilise la propriété algébrique du logarithme népérien : $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$.
Ainsi, $\ln(8) + \ln(2) = \ln(8 \times 2) = \ln(16)$.

5 **Simplifiez l'expression suivante : $\ln(100) - \ln(10)$:**

- ☐ $\ln(90)$
- ☐ $\ln(1000)$
- ☐ $\ln(10)$
- ☑ $\ln(10)$

On utilise la propriété algébrique du logarithme népérien : $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

Ainsi, $\ln(100) - \ln(10) = \ln\left(\frac{100}{10}\right) = \ln(10)$.

6 **Simplifiez l'expression suivante : $3\ln(2) + 2\ln(3)$:**

- ☐ $\ln(12)$
- ☑ $\ln(72)$
- ☐ $\ln(24)$
- ☐ $\ln(36)$

On utilise les propriétés algébriques du logarithme népérien :

$$a\ln(b) = \ln(b^a) \text{ et } \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Ainsi,

$$3\ln(2) + 2\ln(3) = \ln(2^3) + \ln(3^2) = \ln(8) + \ln(9) = \ln(8 \times 9) = \ln(72).$$

7 **Simplifiez l'expression suivante : $\ln(25) - \ln(5)$:**

- ☐ $\ln(5)$
- ☐ $\ln(30)$
- ☑ $\ln(20)$
- ☐ $\ln(125)$

On utilise la propriété algébrique du logarithme népérien : $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

Ainsi, $\ln(25) - \ln(5) = \ln\left(\frac{25}{5}\right) = \ln(5)$.

8 **Résolvez l'équation suivante : $\ln(x^2) = \ln(4x - 3)$:**

- ☑ $x = 1$ ou $x = 3$
- ☐ $x = 2$ ou $x = 5$
- ☐ $x = 0$ ou $x = 4$
- ☐ $x = -1$ ou $x = 3$

Pour résoudre $\ln(x^2) = \ln(4x - 3)$, nous avons d'abord $x^2 = 4x - 3$ par la propriété du logarithme. Ensuite, nous formons l'équation quadratique $x^2 - 4x + 3 = 0$, qui se factorise en $(x - 1)(x - 3) = 0$. Ainsi, les solutions sont $x = 1$ ou $x = 3$ (qui sont bien dans le domaine de définition des deux logarithmes).

9 **Résolvez l'équation suivante : $\ln(x+1) = \ln(2x-3)$:**

- ☑ $x = 4$
- ☐ $x = 0$
- ☐ $x = 2$
- ☐ $x = -1$

Pour résoudre $\ln(x+1) = \ln(2x-3)$, nous avons d'abord $x+1 = 2x-3$ par la propriété du logarithme. Ensuite, nous résolvons pour x : $x+1 = 2x-3$ donne $x = 4$, qui est bien dans le domaine de définition des logarithmes.

10 **Résolvez l'équation suivante : $\ln(x^2-1) = \ln(3x+1)$:**

- ☐ $x = 2$
- ☐ $x = 4$ ou $x = -1$
- ☐ $x = 3$
- ☑ $x = 4$

Pour résoudre $\ln(x^2-1) = \ln(3x+1)$, nous avons d'abord $x^2-1 = 3x+1$ par la propriété du logarithme. Ensuite, nous formons l'équation quadratique $x^2-3x-2 = 0$. Résolvant cette équation quadratique, nous trouvons que les solutions possibles sont $x = 4$ et $x = -1$. Cependant, -1 n'est pas dans le domaine de définition de $\ln(x^2-1)$, donc n'est pas solution.

11 **Résolvez l'équation suivante : $\ln(x+5) = \ln(7x-1)$:**

- ☑ $x = 1$
- ☐ $x = 3$
- ☐ $x = 2$
- ☐ $x = 0.6$

Pour résoudre $\ln(x+5) = \ln(7x-1)$, nous avons d'abord $x+5 = 7x-1$ par la propriété du logarithme. Ensuite, nous résolvons pour x : $x+5 = 7x-1$ donne $6x = 6$ donc $x = 1$.

12 **Calculez la dérivée de la fonction suivante : $f(x) = \ln(x^2+1)$:**

- ☑ $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
- ☐ $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2}$
- ☐ $f'(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$
- ☐ $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Pour calculer la dérivée de $f(x) = \ln(x^2+1)$, nous utilisons la formule de la dérivée de $\ln(u)$, qui est $\frac{u'}{u}$, où $u = x^2+1$. Ainsi, $u' = 2x$. Par conséquent, la dérivée de $f(x)$ est $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

13 **Calculez la dérivée de la fonction suivante : $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1})$:**

- ☑ $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
- ☐ $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- ☐ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$
- ☐ $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

La dérivée de $\ln(u)$ est $\frac{u'}{u}$, où $u = \sqrt{x^2+1}$. Ainsi, $u' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Par conséquent, la dérivée de $f(x)$ est $f'(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

14 **Calculez la dérivée de la fonction suivante : $f(x) = x\ln(x)$:**

- [x] $f'(x) = \ln(x) + 1$
- [ ] $f'(x) = \ln(x)$
- [ ] $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- [ ] $f'(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

$f = u \times v$, avec $u = x$, $u' = 1$, et $v = \ln x$, $v' = \dfrac{1}{x}$. Par conséquent, la dérivée de $f(x)$ est $f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

15 **Un phénomène suit une loi de décroissance exponentielle donnée par $N(t) = N_0\mathrm{e}^{-kt}$. Exprimez t en fonction de $N(t)$ et des autres paramètres :**

- [ ] $t = \dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{N(t)}{N_0}\right)$
- [ ] $t = \dfrac{k}{\ln\left(\dfrac{N(t)}{N_0}\right)}$
- [ ] $t = \dfrac{k}{\ln\left(\dfrac{N_0}{N(t)}\right)}$
- [x] $t = \dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{N_0}{N(t)}\right)$

Nous partons de l'équation $N(t) = N_0\mathrm{e}^{-kt}$. En prenant le logarithme népérien des deux côtés, nous obtenons $\ln(N(t)) = \ln(N_0) - kt$. En isolant t, nous avons $t = \dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{N_0}{N(t)}\right)$.

16 **La population d'une ville croît exponentiellement selon la formule $P(t) = P_0\mathrm{e}^{kt}$, où P_0 est la population initiale, k est une constante et t est le temps en années. Si la population double en 10 ans, trouvez la valeur de k :**

- [ ] $k = \dfrac{10}{\ln(2)}$
- [ ] $k = \ln(2)$
- [x] $k = \dfrac{\ln(2)}{10}$
- [ ] $k = \dfrac{1}{\ln(2)}$

Nous savons que la population double en 10 ans, donc $P(10) = 2P_0$. En substituant dans la formule, nous avons $P_0\mathrm{e}^{k\times 10} = 2P_0$. En simplifiant, nous obtenons $\mathrm{e}^{10k} = 2$. En prenant le logarithme népérien des deux côtés, nous avons $10k = \ln(2)$, donc $k = \dfrac{\ln(2)}{10}$.

17 **Calculez $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.**

- [x] 0
- [ ] 1
- [ ] $+\infty$
- [ ] $-\infty$

Pour calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$, nous utilisons la croissance comparée des fonctions logarithmiques et polynômiales. La fonction $\ln(x)$ croît beaucoup plus lentement que la fonction linéaire x, donc la limite est 0.

18 **Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$.**

- [x] 2
- [ ] 1
- [ ] 0
- [ ] $+\infty$

On factorise dans un premier temps l'opérande du logarithme :

$$\ln(x^2+1) = \ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right] = \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Ensuite, on peut écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left[2 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)}\right] = 2+0 = 2.$$

19 **Calculez $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3x+4)-\ln 2}{x-2}$.**

- [ ] 0
- [ ] $-\dfrac{2}{3}$
- [x] $\dfrac{1}{2}$
- [ ] $+\infty$

En posant $u(x) = \ln(x^2-3x+4)$ et $h = x-2$, et en constatant que $u(2) = \ln 2$, on a :

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-4x+6)-\ln 2}{x-2} = \lim_{h\to 0} \frac{u(2+h)-u(2)}{h} = u'(2) = \frac{1}{2}.$$

20 **Calculez $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln(x)-x}{x-1}$.**

- [x] 0
- [ ] $-\infty$
- [ ] 1
- [ ] $+\infty$

En posant $u(x) = x\ln(x) - x$ et $h = x-1$, et en constatant que $u(1) = 0$ et $u'(x) = \ln(x)$, on a :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)-x}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{u(1+h)-u(1)}{h} = u'(1) = \ln(1) = 0.$$