

# Probabilités, loi binomiale, loi des grands nombres

Terminale, enseignement de spécialité

20 juin 2025

## Réponses

Vous trouverez ci-dessous les réponses correctes.

**1** Laquelle ou lesquelles des expériences suivantes peuvent être modélisées par une loi binomiale ?

- |                                                                                                                   |                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> Lancer un dé équilibré 5 fois et compter le nombre de fois où on obtient un 6 | <input type="checkbox"/> Choisir au hasard 10 élèves et noter leur âge                 |
| <input checked="" type="checkbox"/> Lancer une pièce 10 fois et compter le nombre de piles obtenues               | <input type="checkbox"/> Mesurer 5 fois la masse d'un objet avec une balance imprécise |

Une loi binomiale modélise un nombre de succès pour une répétition d'épreuves indépendantes identiques avec deux issues (succès ou échec) et une probabilité constante de succès.

**2** On note  $X$  la variable qui suit la loi binomiale de paramètres  $n = 6$  et  $p = 0,3$ . Quelle est la valeur de  $P(X = 2)$  ?

- |                                                                              |                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\binom{6}{2} \times 0,3^4 \times 0,7^2$            | <input type="checkbox"/> $\binom{6}{2} \times 0,7^2 \times 0,3^4$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\binom{6}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^4$ | <input type="checkbox"/> $\binom{6}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^2$ |

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$  donc ici  $P(X = 2) = \binom{6}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^4$ .

**3** Si  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n = 10; p = 0,4)$ , alors lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ?

- |                                                |                                                              |
|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> $E(X) = 4$ | <input type="checkbox"/> $E(X) = 10,4$                       |
| <input type="checkbox"/> $\sigma(X) = 2,4$     | <input checked="" type="checkbox"/> $\sigma(X) = \sqrt{2,4}$ |

Pour une loi  $\mathcal{B}(n; p)$ , on a  $E(X) = np$  et  $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$ , donc ici  $E(X) = 4$  et  $\sigma(X) = \sqrt{10 \times 0,4 \times 0,6} = \sqrt{2,4}$ .

- 4 On note  $X$  la variable aléatoire suivant la loi  $\mathcal{B}(5; 0, 6)$ . Parmi les expressions suivantes, lesquelles permettent de calculer  $P(X \leq 2)$  ?

☒  $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

☐  $P(X = 2)$

☒  $1 - P(X \geq 3)$

☒  $1 - P(X = 3) - P(X = 4) - P(X = 5)$

$P(X \leq 2)$  est une somme de probabilités :  $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ , ou encore  $1 - P(X \geq 3) = 1 - P(X = 3) - P(X = 4) - P(X = 5)$ .

- 5 Une machine produit des pièces avec une probabilité de 0,1 d'être défectueuse. On contrôle un échantillon de 10 pièces. Quelle(s) expression(s) donne(nt) la probabilité d'avoir au plus une pièce défectueuse ?

☒  $P(X = 0) + P(X = 1)$

☒  $1 - P(X = 2) - P(X = 3) - \dots - P(X = 10)$

☒  $1 - P(X \geq 2)$

☒  $P(X \leq 1)$

Si  $X \sim \mathcal{B}(10; 0, 1)$ , alors  $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1 - P(X \geq 2)$ .  
Cela correspond aussi à  $1 - P(X = 2) - P(X = 3) - \dots - P(X = 10)$ .

- 6 Un test médical détecte une maladie avec une probabilité de 0,95 si la personne est malade. On teste 8 personnes atteintes, quelle est la probabilité d'avoir exactement 7 tests positifs ?

☒  $P(X = 7)$  avec  $X \sim \mathcal{B}(8; 0, 95)$

☐  $\binom{8}{1} \times 0,95 \times 0,05^7$

☐  $P(X = 1)$  avec  $X \sim \mathcal{B}(8; 0, 95)$

☒  $\binom{8}{7} \times 0,95^7 \times 0,05$

Le nombre de tests positifs suit une loi  $\mathcal{B}(8; 0, 95)$ .  
On utilise  $P(X = 7) = \binom{8}{7} \times 0,95^7 \times 0,05$ .

- 7 On lance une pièce équilibrée 6 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 2 fois pile ?

☒  $P(X \leq 2)$  avec  $X \sim \mathcal{B}(6; 0, 5)$

☒  $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

☐  $1 - P(X \leq 2)$

☐  $P(X = 3)$

La probabilité d'obtenir au plus 2 piles est  $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$  pour  $X \sim \mathcal{B}(6; 0, 5)$ .

- 8 Une urne contient des boules rouges et vertes avec une proportion de 0,2 de rouges. On tire 10 fois avec remise. Quelle est l'espérance du nombre de rouges obtenues ?

☐  $E(X) = 10 \times 0, 8$

☒  $E(X) = 2$

☐  $E(X) = 0, 2$

☐  $E(X) = 10 + 0, 2$

Pour  $X \sim \mathcal{B}(10; 0, 2)$ , on a  $E(X) = 10 \times 0, 2 = 2$ .

- 9 Un joueur a 40 % de chances de gagner une partie. Il joue 12 parties. Quelle est la variance du nombre de victoires ?

☒  $V(X) = 12 \times 0,4 \times 0,6$

☐  $V(X) = \sqrt{2,88}$

☒  $V(X) = 2,88$

☐  $V(X) = \sigma(X)$

Pour  $X \sim \mathcal{B}(12; 0,4)$ , on a  $V(X) = np(1-p) = 12 \times 0,4 \times 0,6 = 2,88$ .

- 10 Une pièce est lancée 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois face ?

☒  $\binom{4}{2} \times 0,5^2 \times 0,5^2$

☐  $P(X = 1)$  avec  $X \sim \mathcal{B}(4; 0,5)$

☒  $P(X = 2)$  avec  $X \sim \mathcal{B}(4; 0,5)$

☐  $\binom{4}{1} \times 0,5^2 \times 0,5^2$

$P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,5^2 \times 0,5^2$  car  $X \sim \mathcal{B}(4; 0,5)$ .

- 11 On répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire indépendante ayant une espérance  $E(X) = 5$  et un écart-type  $\sigma(X) = 2$ . Laquelle ou lesquelles des affirmations suivantes sont vraies selon la loi des grands nombres et le théorème de Bienaymé-Tchebychev ?

☒ La moyenne des résultats va nécessairement converger vers 5

☒ La moyenne des résultats a de fortes chances d'être proche de 5

☐ La moyenne va toujours être inférieure à 5

☒ Avec une probabilité élevée, la moyenne s'écarte de 5 de moins de 1 unité

La loi des grands nombres indique que la moyenne empirique converge vers l'espérance. Le théorème de Bienaymé-Tchebychev permet de majorer la probabilité qu'une moyenne s'écarte trop de cette valeur.

- 12 On répète  $n = 100$  fois une expérience aléatoire avec espérance  $E(X) = 50$  et écart-type  $\sigma(X) = 10$ . On note  $\bar{X}$  la moyenne des 100 résultats. Laquelle ou lesquelles des affirmations suivantes sont vraies d'après le théorème de Bienaymé-Tchebychev ?

☒  $P(|\bar{X} - 50| \geq 2) \leq 0,25$

☐ Le théorème permet de connaître précisément  $P(|\bar{X} - 50| \geq 2)$

☐ Le théorème s'applique uniquement si la variable suit une loi binomiale

☒  $P(|\bar{X} - 50| \geq 2) \leq \frac{10^2}{100 \times 2^2}$

Le théorème de Bienaymé-Tchebychev donne une borne supérieure de la probabilité d'un écart :

$$P(|\bar{X} - E(X)| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{na^2} = \frac{100}{100 \times 4} = 0,25.$$

- 13** Un fabricant produit en moyenne 120 pièces par heure avec un écart-type de 8. Sur une journée, la production horaire est mesurée pendant 100 heures différentes. On note  $\bar{X}$  la moyenne de ces 100 mesures. Quelle(s) estimation(s) peut-on faire selon le théorème de Bienaymé-Tchebychev ?

☒  $P(|\bar{X} - 120| \geq 2) \leq 0,16$

☒ La probabilité que  $\bar{X}$  diffère de 120 de plus de 4 est inférieure à 0,1

☒  $P(|\bar{X} - 120| \geq 4) \leq 0,04$

☐ Le théorème affirme que  $\bar{X}$  est exactement égal à 120

Avec  $E(X) = 120$ ,  $\sigma(X) = 8$  et  $n = 100$ , la variance de la moyenne vaut  $\frac{64}{100}$ .  
Donc  $P(|\bar{X} - 120| \geq a) \leq \frac{64}{100a^2}$  selon le théorème de Bienaymé-Tchebychev.

- 14** Une enquête est menée dans  $n$  lycées choisis au hasard. Dans chaque lycée, un échantillon de 50 élèves est interrogé pour savoir s'ils pratiquent une activité physique régulière. La variable aléatoire  $X_i$  correspond au nombre d'élèves qui répondent « oui » dans le lycée  $i$ , pour  $i = 1$  à  $n$ . On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes, de même espérance  $E(X_i) = 28$  et de même variance  $V(X_i) = 10,8$ . On note  $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$  la moyenne des  $X_i$ . Quelle(s) affirmation(s) est (sont) correcte(s) ?

☒  $E(M_n) = 28$

☐  $\sigma(M_n) = 10,8$

☒  $V(M_n) = \frac{10,8}{n}$

☒ Pour tout réel  $a > 0$ ,  $P(|M_n - 28| \geq a) \leq \frac{10,8}{na^2}$

L'espérance d'une moyenne est la moyenne des espérances, donc  $E(M_n) = 28$ . Les  $X_i$  étant indépendantes, on a  $V(M_n) = \frac{V(X_i)}{N} = \frac{10,8}{n}$ . L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :  
 $P(|M_n - 28| \geq a) \leq \frac{V(M_n)}{a^2}$ .

- 15** On considère la variable aléatoire  $M_n$  définie comme précédemment, avec  $E(M_n) = 28$  et  $V(M_n) = \frac{10,8}{n}$ . Quelle est la plus petite valeur de  $n$  parmi les propositions suivantes pour lesquelles l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'assurer que  $P(27,5 < M_n < 28,5) \geq 0,95$  ?

☐  $n = 45$

☒  $n = 864$

☐  $n = 46$

☐  $n = 799$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :  $P(|M_n - 28| \geq 0,5) \leq \frac{10,8}{n \times 0,5^2} = \frac{43,2}{n}$ . On veut que cette probabilité soit inférieure ou égale à 0,05, donc  $\frac{43,2}{n} \leq 0,05$ , soit  $n \geq 864$ . Ainsi, seules les valeurs de  $n$  supérieures ou égales à 864 conviennent, donc ici, seules  $n = 864$  ou plus seraient acceptables.

- 16** On considère une variable aléatoire  $X$  suivant une loi d'espérance  $E(X) = 5$  et de variance  $V(X) = 20$ . On effectue  $n$  tirages indépendants de  $X$  et on note  $\bar{X}_n$  la moyenne des  $n$  valeurs obtenues. Pour  $n = 40$ , quelle(s) est (sont) la ou les affirmations exactes concernant  $P(|\bar{X}_n - 5| \geq 1)$  ?

☒  $P(|\bar{X}_n - 5| \geq 1) \leq 0,66$

☐  $P(|\bar{X}_n - 5| \geq 1) \leq 0,25$

☐  $P(|\bar{X}_n - 5| \geq 1) \leq 0,4$

☒  $P(|\bar{X}_n - 5| \geq 1) \leq 0,5$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :  $P(|\bar{X}_n - 5| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{n\varepsilon^2}$  donc ici :

$P(|\bar{X}_n - 5| \geq 1) \leq \frac{20}{40 \times 1^2} = 0,5$ . Toutes les valeurs  $\lambda$  supérieures ou égales à 0,5 sont correctes dans l'inégalité  $P(|\bar{X}_n - 5| \geq 1) \leq \lambda$ .

- 17** Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de moyenne  $\mu = 12$  et de variance  $V(X) = 9$ . On effectue  $n = 100$  tirages indépendants de  $X$ , et on note  $\bar{X}_{100}$  la moyenne des 100 valeurs obtenues. Quelle(s) est (sont) la ou les affirmations exactes concernant  $P(|\bar{X}_{100} - 12| < 1,5)$  ?

☒  $P(|\bar{X}_{100} - 12| < 1,5) \geq 0,9$

☒  $P(|\bar{X}_{100} - 12| < 1,5) \geq 0,5$

☒  $P(|\bar{X}_{100} - 12| < 1,5) \geq 0,75$

☒  $P(|\bar{X}_{100} - 12| < 1,5) \geq 0,1$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|\bar{X}_n - 12| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{n\varepsilon^2} = \frac{9}{100 \times 1,5^2} = \frac{9}{225} = 0,04.$$

Donc :  $P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - 0,04 = 0,96$ . Toutes les propositions sont donc vraies.

- 18** Une entreprise produit des capsules de café. Le poids de café contenu dans une capsule, en grammes, est modélisé par une variable aléatoire  $X$  telle que  $E(X) = 5,3$  et  $\sigma(X) = 0,2$ . On prélève un échantillon aléatoire de  $n = 50$  capsules et on note  $\bar{X}_{50}$  la masse moyenne mesurée. Que peut-on affirmer d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

☐  $P(|\bar{X}_{50} - 5,3| \geq 0,1) \leq 0,2$

☒  $P(|\bar{X}_{50} - 5,3| \geq 0,1) \leq 0,08$

☐  $P(|\bar{X}_{50} - 5,3| \geq 0,1) \leq 0,4$

☐  $P(|\bar{X}_{50} - 5,3| \geq 0,1) \leq 0,04$

On a  $V(\bar{X}_{50}) = \frac{V(X)}{50} = \frac{0,2^2}{50} = \frac{0,04}{50} = 0,0008$ . L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :  
 $P(|\bar{X}_{50} - 5,3| \geq 0,1) \leq \frac{0,0008}{0,1^2} = \frac{0,0008}{0,01} = 0,08$ .

- 19** Dans une réserve naturelle, le nombre de pollens déposés chaque jour sur une surface donnée (en  $\text{mm}^2$ ) est modélisé par une variable aléatoire  $X$  avec  $E(X) = 1200$  et  $\sigma(X) = 150$ . On effectue des mesures pendant  $n = 36$  jours et on note  $\bar{X}_{36}$  la moyenne des valeurs observées. Que peut-on affirmer d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

☐  $P(|\bar{X}_{36} - 1200| \geq 50) \leq 0,09$

☐  $P(|\bar{X}_{36} - 1200| \geq 50) \leq 0,01$

☒  $P(|\bar{X}_{36} - 1200| \geq 50) \leq 0,25$

☐  $P(|\bar{X}_{36} - 1200| \geq 50) \leq 0,16$

On a  $V(\bar{X}_{36}) = \frac{150^2}{36} = \frac{22\,500}{36} = 625$ . L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|\bar{X}_{36} - 1200| \geq 50) \leq \frac{625}{50^2} = \frac{625}{2\,500} = 0,25.$$

- 20** Un logiciel analyse automatiquement la hauteur moyenne (en Hz) des notes jouées lors de concerts d'un violoniste. On modélise cette hauteur par une variable aléatoire  $X$  de moyenne  $E(X) = 440$  et d'écart-type  $\sigma(X) = 20$ . Si l'on mesure cette hauteur sur  $n = 100$  concerts, que peut-on affirmer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

☒  $P(|\bar{X}_{100} - 440| \geq 5) \leq 0,16$

☐  $P(|\bar{X}_{100} - 440| \geq 5) \leq 0,01$

☒  $P(|\bar{X}_{100} - 440| \geq 5) \leq 0,25$

☒  $P(|\bar{X}_{100} - 440| \geq 10) \leq 0,04$

On a  $V(\bar{X}_{100}) = \frac{20^2}{100} = 4$ . L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|\bar{X}_{100} - 440| \geq a) \leq \frac{V(X_{100})}{na^2} = \frac{4}{a^2}.$$

— Pour  $a = 5$  :  $\frac{4}{25} = 0,16$  ;

— Pour  $a = 10$  :  $\frac{4}{100} = 0,04$