Probabilités, loi binomiale, loi des grands nombres

Terminale, enseignement de spécialité

20 juin 2025

Consigne

Pour chacune des questions suivantes, plusieurs réponses peuvent être exactes. Lesquelles ? Cochez la ou les bonnes réponses.

1 Laquelle ou lesquelles des expériences suivantes peuvent être modélisées par une loi binomiale ?

☐ Lancer un dé équilibré 5 fois et compter le nombre de fois où on obtient un 6	☐ Choisir au hasard 10 élèves et noter leur âge
☐ Lancer une pièce 10 fois et compter le nombre de piles obtenues	☐ Mesurer 5 fois la masse d'un objet avec une balance imprécise

2 On note X la variable qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,3$. Quelle est la valeur de $P(X = 2)$?

☐ $\binom{6}{2} \times 0,3^4 \times 0,7^2$	☐ $\binom{6}{2} \times 0,7^2 \times 0,3^4$
☐ $\binom{6}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^4$	☐ $\binom{6}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^2$

3 Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 10; p = 0,4)$, alors lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ?

☐ $E(X) = 4$	☐ $E(X) = 10,4$
☐ $\sigma(X) = 2,4$	☐ $\sigma(X) = \sqrt{2,4}$

4 On note X la variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(5; 0,6)$. Parmi les expressions suivantes, lesquelles permettent de calculer $P(X \leq 2)$?

☐ $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$	☐ $P(X = 2)$
☐ $1 - P(X \geq 3)$	☐ $1 - P(X = 3) - P(X = 4) - P(X = 5)$

5 Une machine produit des pièces avec une probabilité de 0,1 d'être défectueuse. On contrôle un échantillon de 10 pièces. Quelle(s) expression(s) donne(nt) la probabilité d'avoir au plus une pièce défectueuse ?

☐ $P(X = 0) + P(X = 1)$	☐ $1 - P(X = 2) - P(X = 3) - \dots - P(X = 10)$
☐ $1 - P(X \geq 2)$	☐ $P(X \leq 1)$

6 Un test médical détecte une maladie avec une probabilité de 0,95 si la personne est malade. On teste 8 personnes atteintes, quelle est la probabilité d'avoir exactement 7 tests positifs ?

$P(X = 7)$ avec $X \sim \mathcal{B}(8; 0,95)$

$\binom{8}{1} \times 0,95 \times 0,05^7$

$P(X = 1)$ avec $X \sim \mathcal{B}(8; 0,95)$

$\binom{8}{7} \times 0,95^7 \times 0,05$

7 On lance une pièce équilibrée 6 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 2 fois pile ?

$P(X \leq 2)$ avec $X \sim \mathcal{B}(6; 0,5)$

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$1 - P(X \leq 2)$

$P(X = 3)$

8 Une urne contient des boules rouges et vertes avec une proportion de 0,2 de rouges. On tire 10 fois avec remise. Quelle est l'espérance du nombre de rouges obtenues ?

$E(X) = 10 \times 0,8$

$E(X) = 2$

$E(X) = 0,2$

$E(X) = 10 + 0,2$

9 Un joueur a 40 % de chances de gagner une partie. Il joue 12 parties. Quelle est la variance du nombre de victoires ?

$V(X) = 12 \times 0,4 \times 0,6$

$V(X) = 2,88$

$V(X) = \sqrt{2,88}$

$V(X) = \sigma(X)$

10 Une pièce est lancée 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois face ?

$\binom{4}{2} \times 0,5^2 \times 0,5^2$

$P(X = 2)$ avec $X \sim \mathcal{B}(4; 0,5)$

$P(X = 1)$ avec $X \sim \mathcal{B}(4; 0,5)$

$\binom{4}{1} \times 0,5^2 \times 0,5^2$

11 On répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire indépendante ayant une espérance $E(X) = 5$ et un écart-type $\sigma(X) = 2$. Laquelle ou lesquelles des affirmations suivantes sont vraies selon la loi des grands nombres et le théorème de Bienaymé-Tchebychev ?

La moyenne des résultats va nécessairement converger vers 5

La moyenne va toujours être inférieure à 5

La moyenne des résultats a de fortes chances d'être proche de 5

Avec une probabilité élevée, la moyenne s'écarte de 5 de moins de 1 unité

12 On répète $n = 100$ fois une expérience aléatoire avec espérance $E(X) = 50$ et écart-type $\sigma(X) = 10$. On note $\bar{X}$ la moyenne des 100 résultats. Laquelle ou lesquelles des affirmations suivantes sont vraies d'après le théorème de Bienaymé-Tchebychev ?

$P(|\bar{X} - 50| \geq 2) \leq 0,25$

Le théorème s'applique uniquement si la variable suit une loi binomiale

Le théorème permet de connaître précisément $P(|\bar{X} - 50| \geq 2)$

$P(|\bar{X} - 50| \geq 2) \leq \frac{10^2}{100 \times 2^2}$

13 Un fabricant produit en moyenne 120 pièces par heure avec un écart-type de 8. Sur une journée, la production horaire est mesurée pendant 100 heures différentes. On note $\bar{X}$ la moyenne de ces 100 mesures. Quelle(s) estimation(s) peut-on faire selon le théorème de Bienaymé-Tchebychev ?

$P(|\bar{X} - 120| \geq 2) \leq 0,16$

La probabilité que $\bar{X}$ diffère de 120 de plus de 4 est inférieure à 0,1

$P(|\bar{X} - 120| \geq 4) \leq 0,04$

Le théorème affirme que $\bar{X}$ est exactement égal à 120

14 Une enquête est menée dans n lycées choisis au hasard. Dans chaque lycée, un échantillon de 50 élèves est interrogé pour savoir s'ils pratiquent une activité physique régulière. La variable aléatoire X_i correspond au nombre d'élèves qui répondent « oui » dans le lycée i , pour $i = 1$ à n . On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes, de même espérance $E(X_i) = 28$ et de même variance $V(X_i) = 10,8$. On note $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ la moyenne des X_i . Quelle(s) affirmation(s) est (sont) correcte(s) ?

$E(M_n) = 28$

$\sigma(M_n) = 10,8$

$V(M_n) = \frac{10,8}{n}$

Pour tout réel $a > 0$, $P(|M_n - 28| \geq a) \leq \frac{10,8}{na^2}$

15 On considère la variable aléatoire M_n définie comme précédemment, avec $E(M_n) = 28$ et $V(M_n) = \frac{10,8}{n}$. Quelle est la plus petite valeur de n parmi les propositions suivantes pour lesquelles l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'assurer que $P(27,5 < M_n < 28,5) \geq 0,95$?

$n = 45$

$n = 864$

$n = 46$

$n = 799$

16 On considère une variable aléatoire X suivant une loi d'espérance $E(X) = 5$ et de variance $V(X) = 20$. On effectue n tirages indépendants de X et on note $\bar{X}_n$ la moyenne des n valeurs obtenues. Pour $n = 40$, quelle(s) est (sont) la ou les affirmations exactes concernant $P(|\bar{X}_n - 5| \geq 1)$?

$P(|\bar{X}_n - 5| \geq 1) \leq 0,66$

$P(|\bar{X}_n - 5| \geq 1) \leq 0,25$

$P(|\bar{X}_n - 5| \geq 1) \leq 0,4$

$P(|\bar{X}_n - 5| \geq 1) \leq 0,5$

17 Une variable aléatoire X suit une loi de moyenne $\mu = 12$ et de variance $V(X) = 9$. On effectue $n = 100$ tirages indépendants de X , et on note $\bar{X}_{100}$ la moyenne des 100 valeurs obtenues. Quelle(s) est (sont) la ou les affirmations exactes concernant $P(|\bar{X}_{100} - 12| < 1,5)$?

$P(|\bar{X}_{100} - 12| < 1,5) \geq 0,9$

$P(|\bar{X}_{100} - 12| < 1,5) \geq 0,5$

$P(|\bar{X}_{100} - 12| < 1,5) \geq 0,75$

$P(|\bar{X}_{100} - 12| < 1,5) \geq 0,1$

18 Une entreprise produit des capsules de café. Le poids de café contenu dans une capsule, en grammes, est modélisé par une variable aléatoire X telle que $E(X) = 5,3$ et $\sigma(X) = 0,2$. On prélève un échantillon aléatoire de $n = 50$ capsules et on note $\bar{X}_{50}$ la masse moyenne mesurée. Que peut-on affirmer d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

$P(|\bar{X}_{50} - 5,3| \geq 0,1) \leq 0,2$

$P(|\bar{X}_{50} - 5,3| \geq 0,1) \leq 0,08$

$P(|\bar{X}_{50} - 5,3| \geq 0,1) \leq 0,4$

$P(|\bar{X}_{50} - 5,3| \geq 0,1) \leq 0,04$

19 Dans une réserve naturelle, le nombre de pollens déposés chaque jour sur une surface donnée (en mm^2) est modélisé par une variable aléatoire X avec $E(X) = 1200$ et $\sigma(X) = 150$. On effectue des mesures pendant $n = 36$ jours et on note $\bar{X}_{36}$ la moyenne des valeurs observées. Que peut-on affirmer d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

$P(|\bar{X}_{36} - 1200| \geq 50) \leq 0,09$

$P(|\bar{X}_{36} - 1200| \geq 50) \leq 0,01$

$P(|\bar{X}_{36} - 1200| \geq 50) \leq 0,25$

$P(|\bar{X}_{36} - 1200| \geq 50) \leq 0,16$

20 Un logiciel analyse automatiquement la hauteur moyenne (en Hz) des notes jouées lors de concerts d'un violoniste. On modélise cette hauteur par une variable aléatoire X de moyenne $E(X) = 440$ et d'écart-type $\sigma(X) = 20$. Si l'on mesure cette hauteur sur $n = 100$ concerts, que peut-on affirmer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

$P(|\bar{X}_{100} - 440| \geq 5) \leq 0,16$

$P(|\bar{X}_{100} - 440| \geq 5) \leq 0,01$

$P(|\bar{X}_{100} - 440| \geq 5) \leq 0,25$

$P(|\bar{X}_{100} - 440| \geq 10) \leq 0,04$