Sommaire

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

11 juillet 2017

Le second degré

Énoncés

11 juillet 2017

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Ⓐ Exercices d'application du cours

Ⓡ Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Équations

■ Exercice 1. Calcul de discriminant et de racines

★☆☆☆☆ Ⓐ

Corrigé page 8

(Source : 01-secdeg-01)

Pour chacun des trinômes suivants, calculer le discriminant et ses éventuelles racines.

1. x^2-2x+1
2. x^2-3x+2
3. $-x^2+3x-2$
4. x^2+x+1
5. $3x^2-5x+1$
6. $-2x^2-5x+3$
7. $\frac{1}{4}x^2-4x+16$
8. $3x^2-8x+2$
9. $-5x^2+4x+3$

■ Exercice 2. Équation avec une racine carrée

★★★☆☆ Ⓐ

Corrigé page 9

(Source : 01-secdeg-08)

Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{x+1}=2x-3$
2. $\sqrt{x^2-8}=2x-5$
3. $\sqrt{2x-1}=1-2x$

■ Exercice 3. Avec changement de variables

★★★☆☆ Ⓐ

Corrigé page 11

(Source : 01-secdeg-09)

Résoudre les équations suivantes :

1. $x-5\sqrt{x}+4=0$
2. $-x^4+3x^2-2=0$
3. $\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x}-2=0$
4. $2\left(\cos x\right)^2+3\cos x-2=0$
5. $(x^2-3x+1)^2-3(x^2-3x+1)+2=0$

■ Exercice 10. Trouver la bonne courbe

★★☆☆☆ R
Corrigé page 19

(Source : 01-secdeg-16)

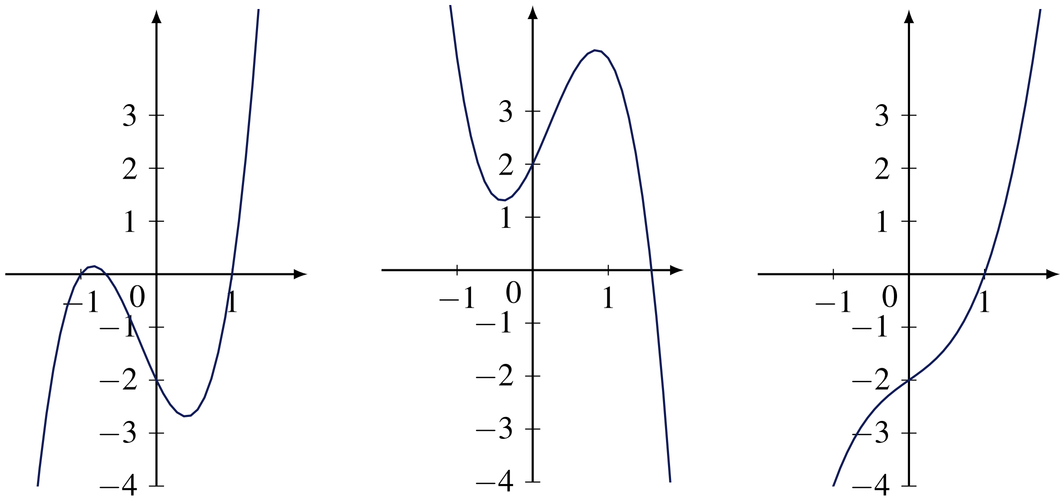
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x^2 + 2x^2 - 3x - 2.$$

1 Montrer que $f(1) = 0$.

2 En déduire une factorisation de $f(x)$ sous la forme $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

3 En déduire la courbe représentative de f parmi les trois ci-dessous :



a *b* *c*

Trinôme avec paramètres

■ Exercice 11. Conditions sur deux paramètres

★☆☆☆☆ R
Corrigé page 20

(Source : 01-secdeg-02)

On considère le trinôme $x^2 + mx + p$, où m et p sont deux réels.

À quelles conditions sur m et p ce trinôme admet au moins une racine ?

■ Exercice 12. Trinôme avec un paramètre

★★☆☆☆ R
Corrigé page 20

(Source : 01-secdeg-13)

Montrer que, pour tout k dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, le polynôme :

$$P(x) = (k+1)x^2 + 2kx + (k-1)$$

admet toujours deux racines distinctes.

■ Corrigé de l'exercice 3. [Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 $x-5\sqrt{x}+4=0$. On pose $X=\sqrt{x}$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$X^2-5X+4=0\,,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta=25-16=9.$$

Donc les solutions de l'équation $X^2-5X+4=0$ sont :

$$X_1=\frac{5-3}{2}=1 \qquad \text{et} \qquad X_2=\frac{5+3}{2}=4.$$

Les solutions de l'équation $x-5\sqrt{x}+4=0$ doivent donc vérifier :

$$\sqrt{x_1}=1 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{x_2}=4\,,$$

d'où :

$$x_1=1 \qquad \text{et} \qquad x_2=16.$$

D'où :

$$\boxed{S=\{1\,;\,16\}}$$

2 $-x^4+3x^2-2=0$. On pose $X=x^2$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$-X^2+3X-2=0\,,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta=9-8=1.$$

Les solutions de l'équation $-X^2+3X-2=0$ sont donc :

$$X_1=\frac{-3-1}{-2}=2 \qquad \text{et} \qquad X_2=\frac{-3+1}{-2}=1.$$

Les solutions de l'équation $-x^4+3x^2-2=0$ sont donc x_1 et x_2 tels que :

$$x_1^2=1 \qquad \text{et} \qquad x_2^2=2\,,$$

soit :

$$x_1=1 \text{ ou } x_1=-1 \qquad \text{et} \qquad x_2=\sqrt{2} \text{ ou } x_2=-\sqrt{2}.$$

L'ensemble solution de l'équation $-x^4+3x^2-2=0$ est donc :

$$\boxed{S=\left\{-\sqrt{2}\,;\,-1\,;\,1\,;\,\sqrt{2}\right\}}$$

3 $2\big(\cos x\big)^2+3\cos x-2=0$. On pose $X=\cos x$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$2X^2+3X-2=0$$

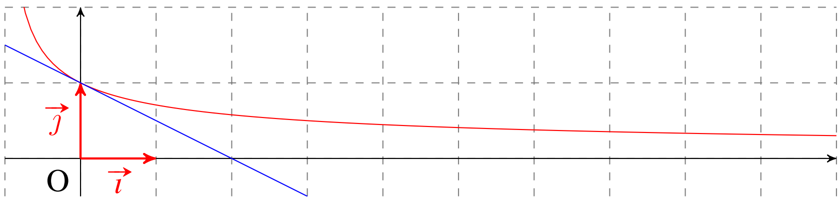
dont le discriminant est :

$$\Delta=9-4\times2\times(-2)=25=5^2.$$

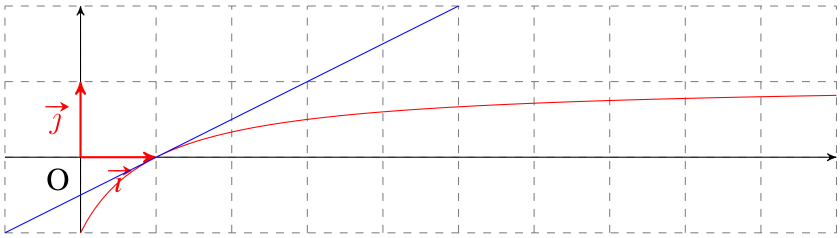
Elle admet donc deux solutions distinctes :

$$X_1=\frac{-3-5}{2\times2}=-2 \qquad \text{et} \qquad X_2=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}.$$

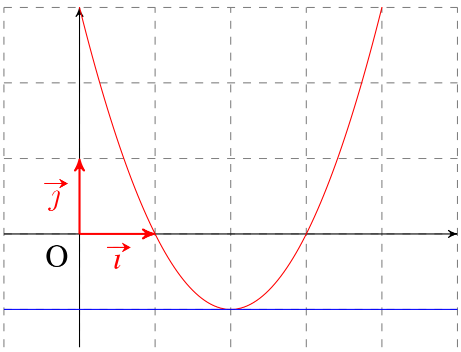
2 $a = 0$.



3 $a = 1$.



4 $a = 2$.

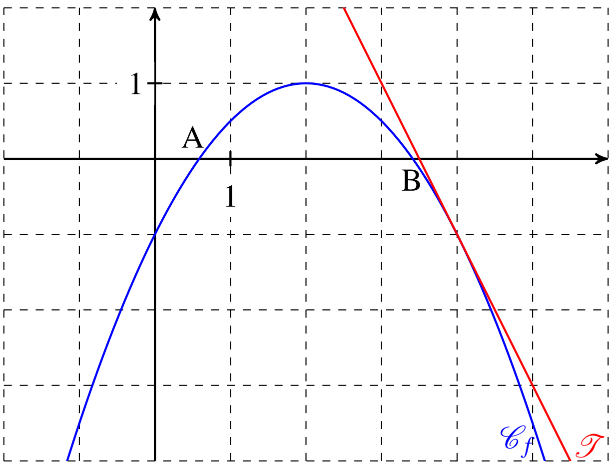


■ Exercice 3. Détermination d'une fonction par lecture graphique

★★☆☆☆ R

(Source : 04-derivation-05)

Corrigé page 95



La courbe ci-dessus représente la fonction f dont l'expression est de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 $f(x) = (3x+2)\sqrt{x}$.

- Le domaine de définition de f est : $\mathscr{D}_f = [0\,;+\infty[$.
- f est de la forme uv avec :

  $u(x) = 3x+2$ $\qquad v(x) = \sqrt{x}$

  $u'(x) = 3$ $\qquad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

  Donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\
&= 3\sqrt{x} + (3x+2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\\
&= 3\sqrt{x} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{6x+3x+2}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{9x+2}{2\sqrt{x}}}$$

- $f'(x) > 0 \iff 9x+2 > 0$ car $2\sqrt{x} > 0$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.
  Ainsi, $f'(x) > 0 \iff x > -\dfrac{2}{9}$, d'où le tableau suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\qquad +$
$f(x)$	0 $\nearrow$

- D'après le tableau de variation de f, on peut dire que $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

2 $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x}$.

- Le domaine de définition de g est $\mathscr{D}_g =]0\,;+\infty[$.
- g est de la forme uv avec :

  $u(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ $\qquad v(x) = \sqrt{x}$

  $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2 Un algorithme possible est :

Algorithme 6: L'algorithme complété

```
Entrées
   L est une liste de nombres
   N est un nombre entier
   i et j sont des nombres entiers
   a, m, P, M sont des nombres
   indice est un nombre entier
Initialisation
   Entrer L
Traitement
   N prend la valeur Longueur(L)
   Pour i allant de 1 à N
      m prend la valeur L[i]
      indice prend la valeur i
      Pour j allant de i+1 à N
         Si L[j]<m alors
            m prend la valeur L[j]
            indice prend la valeur j
         Fin du Si
      Fin du Pour
      a prend la valeur L[i]
      L[i] prend la valeur L[indice]
      L[indice] prend la valeur a
   Fin du Pour
   P prend la valeur N
   Tant que P>=2
      P prend la valeur P-2
   Fin du Tant que
   Si P=1 alors
      M prend la valeur L[(n+1)/2]
   sinon
      M prend la valeur (L[N/2]+L[N/2+1])/2
   Fin du Si
Sortie
   Afficher L et M
```

■ Corrigé de l'exercice 5.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 Notons x la note au devoir coefficient 2. Il faut :

$$\frac{(0,5+2+1)\times 8+2x}{0,5+2+1+2} \geqslant 10$$

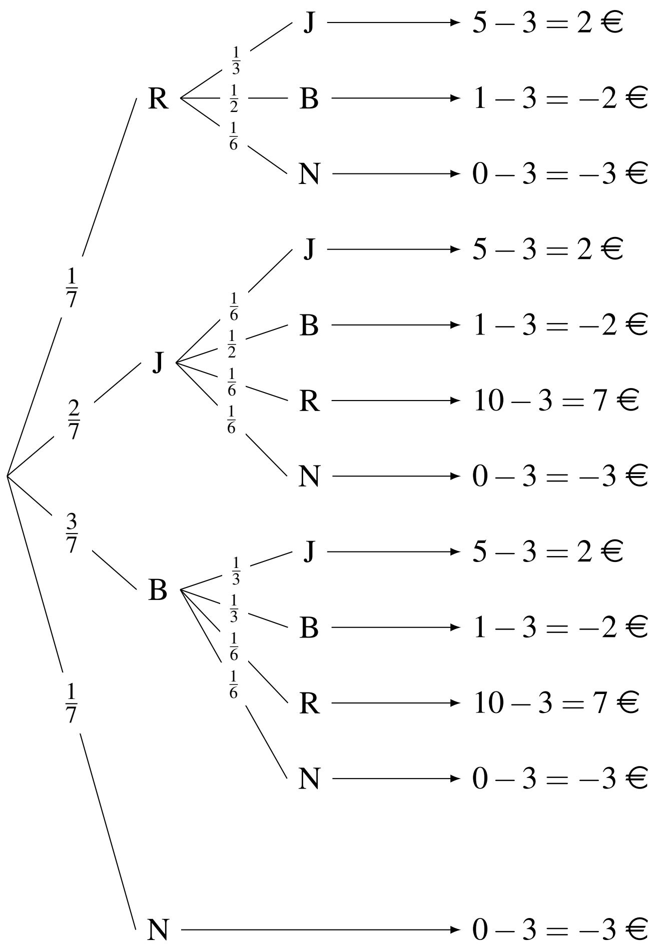
soit :

$$28+2x \geqslant 10\times 5,5.$$

■ Corrigé de l'exercice 8.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 L'arbre est le suivant :



2 D'après l'arbre précédent,

- $P(X=-3) = \frac{1}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$
- $P(X=-2) = \frac{1}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{14}$
- $P(X=2) = \frac{1}{7}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{21}$
- $P(X=7) = \frac{2}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{42}$

La loi de probabilité de X est alors :

x_i	-3	-2	2	7
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{42}$

3 $\mathbb{E}(X) = (-3)\times\frac{2}{7}+(-2)\times\frac{5}{14}+2\times\frac{5}{21}+7\times\frac{5}{42}=-\frac{11}{42}$.

Ainsi, le jeu est plutôt défavorable au joueur.

4 $\mathbb{E}(X) = -\frac{11}{42}$ donc il faut ajouter à la mise de départ $\frac{11}{42}$ €, soit à peu près 0,26 €.

La mise de départ doit donc être égale à $3-0,26=2,74$ €.