

Sommaire

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

11 juillet 2017

I	Le second degré	1
I.1	Calcul de discriminant et de racines	1
I.2	Équation avec une racine carrée	1
I.3	Avec changement de variables	1
I.4	Changements de variables	2
I.5	Résolution d'inéquations	2
I.6	Une inéquation	2
I.7	Polynôme de degré 3	3
I.8	Polynôme de degré 4	3
I.9	Trouver un trinôme à partir d'une parabole	3
I.10	Trouver la bonne courbe	4
I.11	Conditions sur deux paramètres	4
I.12	Trinôme avec un paramètre	4
I.13	Une équation avec paramètre	5
I.14	En Physique	5
I.15	À Noël	6
I.16	Aire d'une couronne rectangulaire	6
I.17	Trouver deux nombres	6
I.18	La trajectoire de la balle de tennis	6
I.19	Vers le nombre d'or	7
I.20	Exploiter ses connaissances	7
I.21	Une autre écriture pour une racine carrée	7
I.22	Exercice de recherche	7
II	Généralités sur les fonctions	29
II.1	Trouver le domaine de définition	29
II.2	Fonctions paires, fonctions impaires	29
II.3	Lecture de tableaux de variation	29
II.4	Lectures graphiques	30
II.5	Décompositions en fonctions de référence	31
II.6	Fonctions associées : domaine de définition et variations (1)	31
II.7	Fonctions associées : domaine de définition et variations (2)	31
II.8	Étude d'une fonction avec valeurs absolues	32
II.9	Calculs avec valeurs absolues	32
II.10	Valeur absolue d'un polynôme de degré 2	32
II.11	Inéquations avec valeurs absolues	33
II.12	Équations avec valeurs absolues	33
II.13	Ensemble de points	33

III Suites	51
III.1 Sens de variation	51
III.2 Sens de variation, majorant et minorant	51
III.3 Sens de variation d'une suite définie par récurrence	51
III.4 Sens de variation d'une suite avec racines carrées	52
III.5 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique	52
III.6 Somme des premiers termes d'une suite géométrique	52
III.7 Dénombrement	52
III.8 Reconnaître une suite arithmétique et géométrique	53
III.9 Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique, le retour	53
III.10 Établir une relation de récurrence	53
III.11 Trouver un terme ou la raison dans une suite arithmétique	54
III.12 Trouver un terme ou la raison d'une suite géométrique	54
III.13 Le super-héros	55
III.14 Compilation d'exercices	55
III.15 Étude d'une suite arithmético-géométrique avec algorithme	56
III.16 Le débit de l'eau, le débit de lait	57
III.17 Somme des premiers termes d'une suite arithmético-géométrique	58
III.18 Suite homographique et suite géométrique, avec un algorithme	58
III.19 Suite homographique et suite arithmétique	59
III.20 Suites imbriquées	59
III.21 Suites imbriquées	60
IV Dérivation	85
IV.1 Nombre dérivé & équation de tangentes	85
IV.2 Lecture graphique de nombres dérivés	85
IV.3 Détermination d'une fonction par lecture graphique	86
IV.4 Détermination d'une fonction par lecture graphique	87
IV.5 Dérivées de référence	87
IV.6 Dérivées de fonctions produits et quotient	88
IV.7 Variations de fonctions produits	88
IV.8 Sens de variation de fonctions quotients	88
IV.9 Étude complète de la fonction $x \mapsto \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$	88
IV.10 Optimisation d'une aire dans un triangle rectangle	89
IV.11 Optimisation du volume d'une boîte	89
IV.12 Optimisation d'une aire dans une parabole	90
IV.13 Optimisation de la surface d'une casserole	90
IV.14 Optimisation du volume d'un cône	91
V Trigonométrie	109
V.1 Mesure principale	109
V.2 Calculs de mesures principales d'angles	109
V.3 Trouver des angles	110
V.4 Lecture d'angles sur le cercle trigonométrique	110
V.5 Résolution d'équations trigonométriques	111
V.6 Transformation d'une équation	111
V.7 Équations avec changement de variable	111
V.8 À la découverte d'un sinus et d'un cosinus inconnu	112

VI Géométrie plane	124
VI.1 Vecteurs colinéaires dans un repère	124
VI.2 Vecteurs avec paramètre	124
VI.3 Alignement de points	124
VI.4 Dans un parallélogramme	125
VI.5 Équations cartésiennes de droites	125
VI.6 Équation de droites avec paramètre	125
VI.7 Équation de droites & médiatrice	126
VI.8 Alignement de points	126
VI.9 Un algorithme	126
VII Produit scalaire	133
VII.1 Produits scalaires et angles	133
VII.2 Produits scalaires et angles dans un repère orthonormé	133
VII.3 Angle dans un carré	134
VII.4 Équations de cercles	134
VII.5 Équation de droites perpendiculaires	134
VII.6 Détermination d'un angle dans un cercle	134
VII.7 Dans un rectangle	135
VII.8 Avec les formules trigonométriques	135
VII.9 Dans un repère : cercle, angle et hauteur	135
VII.10 Dans un rectangle	135
VII.11 Puissance d'un point par rapport à un cercle	136
VII.12 Trois cercles tangents	136
VII.13 Aire d'un triangle inscrit dans un cercle	137
VII.14 La formule de Héron	137
VIII Statistiques descriptives	157
VIII.1 Notes de deux classes	157
VIII.2 Salaires dans deux entreprises	157
VIII.3 Influence d'un ajout dans une série statistique	158
VIII.4 Un algorithme	158
VIII.5 De l'algèbre dans les statistiques	159
IX Probabilités	168
IX.1 Différents ordinateurs	168
IX.2 49 boules dans un urne	168
IX.3 Avec deux dés	169
IX.4 Avec une pièce de monnaie	169
IX.5 Deux urnes	169
IX.6 Lancer de 3 pièces	170
IX.7 Nombre variable de boules	170
IX.8 Recherche d'une mise de départ	171
IX.9 Avec une urne	171
IX.10 Dans une usine de composants électroniques	172
IX.11 Au tennis	172
IX.12 Au lycée à vélo	172
IX.13 Le jeu des petits chevaux	173

X	Fluctuation, échantillonnage	185
X.1	Pièce défectueuse	185
X.2	Un dé peut-être truqué	185
X.3	Le médecin de campagne	185
X.4	Les OVNIS	185
X.5	Coup de fatigue au centre d'appels	186

Le second degré

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

11 juillet 2017

Équations

■ Exercice 1. Calcul de discriminant et de racines

★★★★☆ **A**

Corrigé page 8

(Source : 01-secdeg-01)

Pour chacun des trinômes suivants, calculer le discriminant et ses éventuelles racines.

1 $x^2 - 2x + 1$

4 $x^2 + x + 1$

7 $\frac{1}{4}x^2 - 4x + 16$

2 $x^2 - 3x + 2$

5 $3x^2 - 5x + 1$

8 $3x^2 - 8x + 2$

3 $-x^2 + 3x - 2$

6 $-2x^2 - 5x + 3$

9 $-5x^2 + 4x + 3$

■ Exercice 2. Équation avec une racine carrée

★★★★☆ **A**

Corrigé page 9

(Source : 01-secdeg-08)

Résoudre les équations suivantes :

1 $\sqrt{x+1} = 2x - 3$

2 $\sqrt{x^2 - 8} = 2x - 5$

3 $\sqrt{2x-1} = 1 - 2x$

■ Exercice 3. Avec changement de variables

★★★★☆ **A**

Corrigé page 11

(Source : 01-secdeg-09)

Résoudre les équations suivantes :

1 $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$

2 $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$

3 $\frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} - 2 = 0$

4 $2(\cos x)^2 + 3\cos x - 2 = 0$

5 $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 2 = 0$

■ Exercice 10. Trouver la bonne courbe

★★★★☆ R

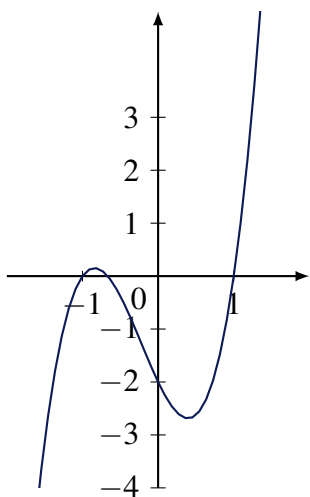
(Source : 01-secdeg-16)

Corrigé page 19

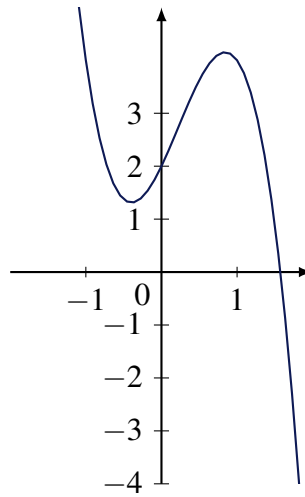
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x^2 + 2x^2 - 3x - 2.$$

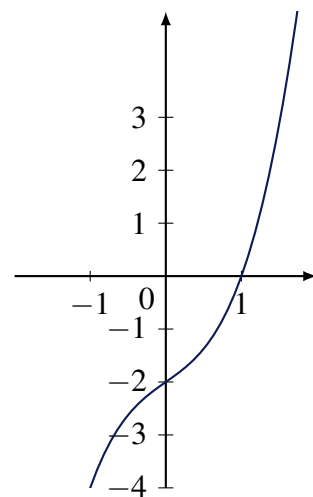
- 1 Montrer que $f(1) = 0$.
- 2 En déduire une factorisation de $f(x)$ sous la forme $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
- 3 En déduire la courbe représentative de f parmi les trois ci-dessous :



a



b



c

Trinôme avec paramètres

■ Exercice 11. Conditions sur deux paramètres

★★★★☆ R

(Source : 01-secdeg-02)

Corrigé page 20

On considère le trinôme $x^2 + mx + p$, où m et p sont deux réels.

À quelles conditions sur m et p ce trinôme admet au moins une racine ?

■ Exercice 12. Trinôme avec un paramètre

★★★★☆ R

(Source : 01-secdeg-13)

Corrigé page 20

Montrer que, pour tout k dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, le polynôme :

$$P(x) = (k + 1)x^2 + 2kx + (k - 1)$$

admet toujours deux racines distinctes.

■ **Corrigé de l'exercice 3.**

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$. On pose $X = \sqrt{x}$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$X^2 - 5X + 4 = 0,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 25 - 16 = 9.$$

Donc les solutions de l'équation $X^2 - 5X + 4 = 0$ sont :

$$X_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Les solutions de l'équation $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$ doivent donc vérifier :

$$\sqrt{x_1} = 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{x_2} = 4,$$

d'où :

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = 16.$$

D'où :

$$S = \{1 ; 16\}$$

2 $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$. On pose $X = x^2$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$-X^2 + 3X - 2 = 0,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 9 - 8 = 1.$$

Les solutions de l'équation $-X^2 + 3X - 2 = 0$ sont donc :

$$X_1 = \frac{-3-1}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-3+1}{-2} = 1.$$

Les solutions de l'équation $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ sont donc x_1 et x_2 tels que :

$$x_1^2 = 1 \quad \text{et} \quad x_2^2 = 2,$$

soit :

$$x_1 = 1 \text{ ou } x_1 = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \sqrt{2} \text{ ou } x_2 = -\sqrt{2}.$$

L'ensemble solution de l'équation $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ est donc :

$$S = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$$

3 $2(\cos x)^2 + 3\cos x - 2 = 0$. On pose $X = \cos x$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$2X^2 + 3X - 2 = 0$$

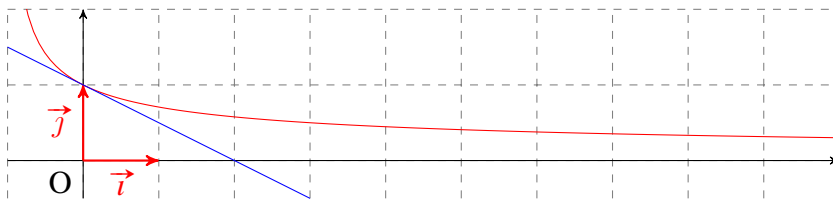
dont le discriminant est :

$$\Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 = 5^2.$$

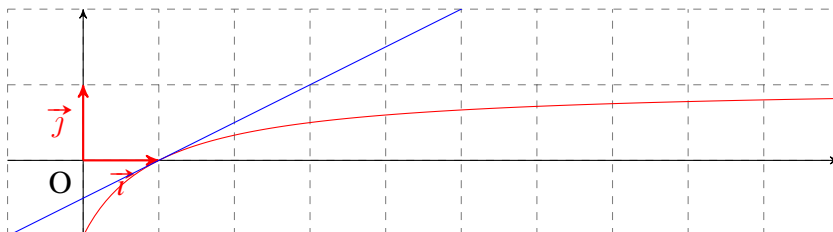
Elle admet donc deux solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{-3-5}{2 \times 2} = -2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}.$$

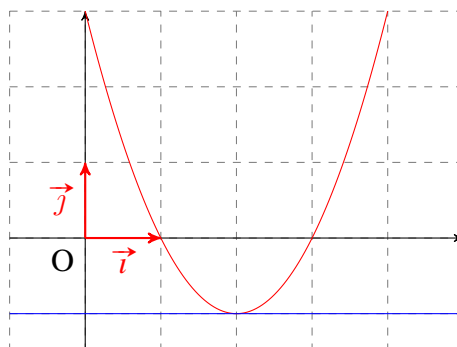
2 $a = 0$.



3 $a = 1$.



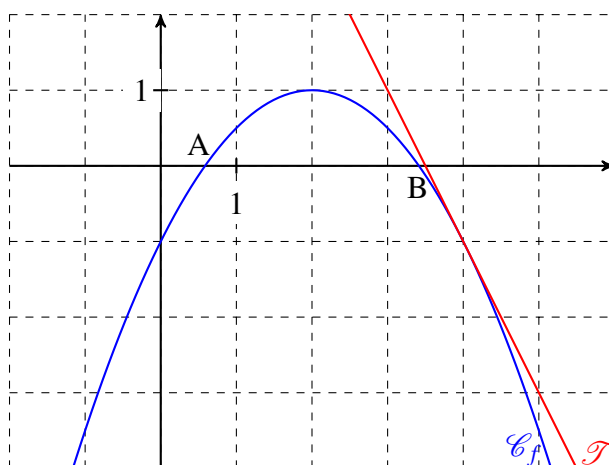
4 $a = 2$.



■ Exercice 3. Détermination d'une fonction par lecture graphique

(Source : 04-derivation-05)

★★★★☆ **R**
Corrigé page 95



La courbe ci-dessus représente la fonction f dont l'expression est de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 $f(x) = (3x+2)\sqrt{x}$.

- Le domaine de définition de f est : $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$.
- f est de la forme uv avec :

$$u(x) = 3x + 2$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$u'(x) = 3$$


$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 3\sqrt{x} + (3x+2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 3\sqrt{x} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x+3x+2}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{9x+2}{2\sqrt{x}}$$

- $f'(x) > 0 \iff 9x+2 > 0$ car $2\sqrt{x} > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
Ainsi, $f'(x) > 0 \iff x > -\frac{2}{9}$, d'où le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	

- D'après le tableau de variation de f , on peut dire que $f(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.

2 $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$.

- Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g =]0; +\infty[$.
- g est de la forme uv avec :

$$u(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2 Un algorithme possible est :

Algorithme 6: L'algorithme complété

Entrées

L est une liste de nombres
N est un nombre entier
i et j sont des nombres entiers
a, m, P, M sont des nombres
indice est un nombre entier

Initialisation

Entrer L

Traitement

N prend la valeur Longueur(L)

Pour i allant de 1 à N

m prend la valeur L[i]
indice prend la valeur i

Pour j allant de i+1 à N

Si L[j]<m alors

m prend la valeur L[j]
indice prend la valeur j

Fin du Si

Fin du Pour

a prend la valeur L[i]
L[i] prend la valeur L[indice]
L[indice] prend la valeur a

Fin du Pour

P prend la valeur N

Tant que P>=2

P prend la valeur P-2

Fin du Tant que

Si P=1 alors

M prend la valeur L[(n+1)/2]

sinon

M prend la valeur (L[N/2]+L[N/2+1])/2

Fin du Si

Sortie

Afficher L et M

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

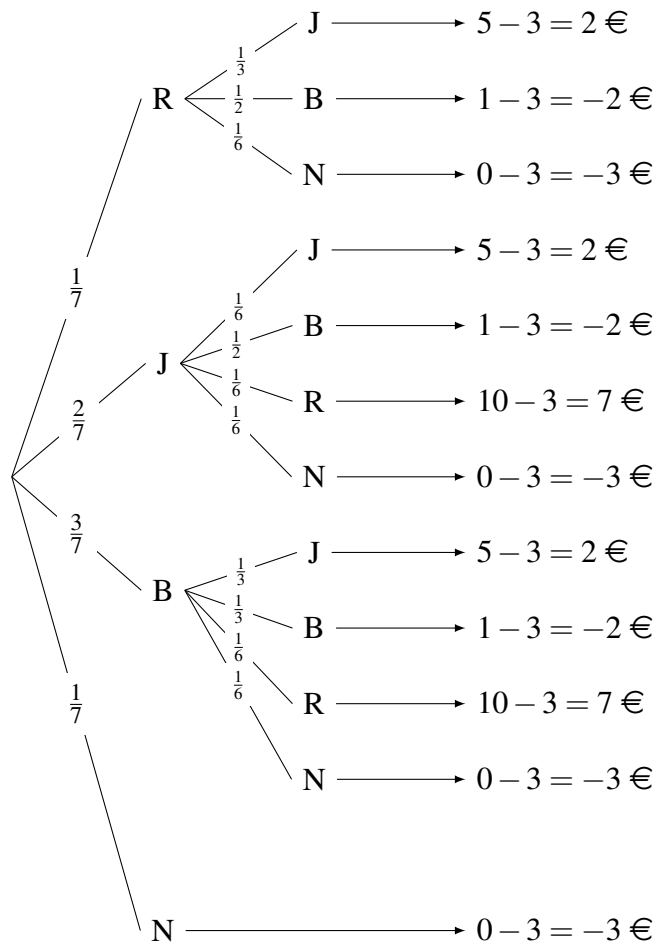
1 Notons x la note au devoir coefficient 2. Il faut :

$$\frac{(0,5 + 2 + 1) \times 8 + 2x}{0,5 + 2 + 1 + 2} \geq 10$$

soit :

$$28 + 2x \geq 10 \times 5,5.$$

1 L'arbre est le suivant :



2 D'après l'arbre précédent,

- $P(X = -3) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$
- $P(X = -2) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{14}$
- $P(X = 2) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$
- $P(X = 7) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{42}$

La loi de probabilité de X est alors :

x_i	-3	-2	2	7
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{42}$

3 $\mathbb{E}(X) = (-3) \times \frac{2}{7} + (-2) \times \frac{5}{14} + 2 \times \frac{5}{21} + 7 \times \frac{5}{42} = -\frac{11}{42}$.

Ainsi, le jeu est plutôt défavorable au joueur.

4 $\mathbb{E}(X) = -\frac{11}{42}$ donc il faut ajouter à la mise de départ $\frac{11}{42}$ €, soit à peu près 0,26 €.

La mise de départ doit donc être égale à $3 - 0,26 = 2,74$ €.