Disponible sur *mathweb.fr*

211 exercices de mathématiques pour Terminale S

Enseignement obligatoire et de spécialité

Stéphane PASQUET

4 février 2018

Sommaire

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

4 février 2018

Enseignement obligatoire

Enseignement de spécialité

Première partie

Enseignement obligatoire

■ Corrigé de l'exercice 2.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1
$$\begin{aligned}\frac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-1} &= \frac{x^2\left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} \quad \text{pour } x\neq 0\\ &= \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}} \quad \text{pour } x\neq 0\end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ donc :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=2$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=3$.

Ainsi, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-1}=\frac{2}{3}}$

2
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3} &= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(x+\frac{3}{x}\right)} \quad \text{pour } x\neq 0\\ &= \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} \quad \text{pour } x>0\\ &= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\left(2+\frac{3}{x}\right)}\end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ donc :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1}=1$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)=2$.

Par quotient, on a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}=\frac{1}{2}}$

et donc :

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

2 Posons $f(x) = \cos(5x) - \cos(3x)$ et $g(x) = \sin(4x) - \sin(3x)$.

Alors, $f'(x) = -5\sin(5x) + 3\sin(3x)$ et $g'(x) = 4\cos(4x) - 3\cos(3x)$.

Ainsi, $f'(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

f et g vérifient toutes les conditions nécessaires pour utiliser la règle de l'Hôpital donc :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\cos(5x) - \cos(3x)}{\sin(4x) - \sin(3x)} = 0}$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

Posons $f(x) = 3x^3 - 5x + 1$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- $f'(x) = 9x^2 - 5$ d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{5}}{3}$		$\frac{\sqrt{5}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$3,48$	↘	$-1,48$	↗	$+\infty$

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 3,48 \quad ; \quad f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx -1,48.$$

- Notons $I_1 = \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{5}}{3}\right[$, $I_2 = \left]-\frac{\sqrt{5}}{3} ; \frac{\sqrt{5}}{3}\right[$ et $I_3 = \left]\frac{\sqrt{5}}{3} ; +\infty\right[$.

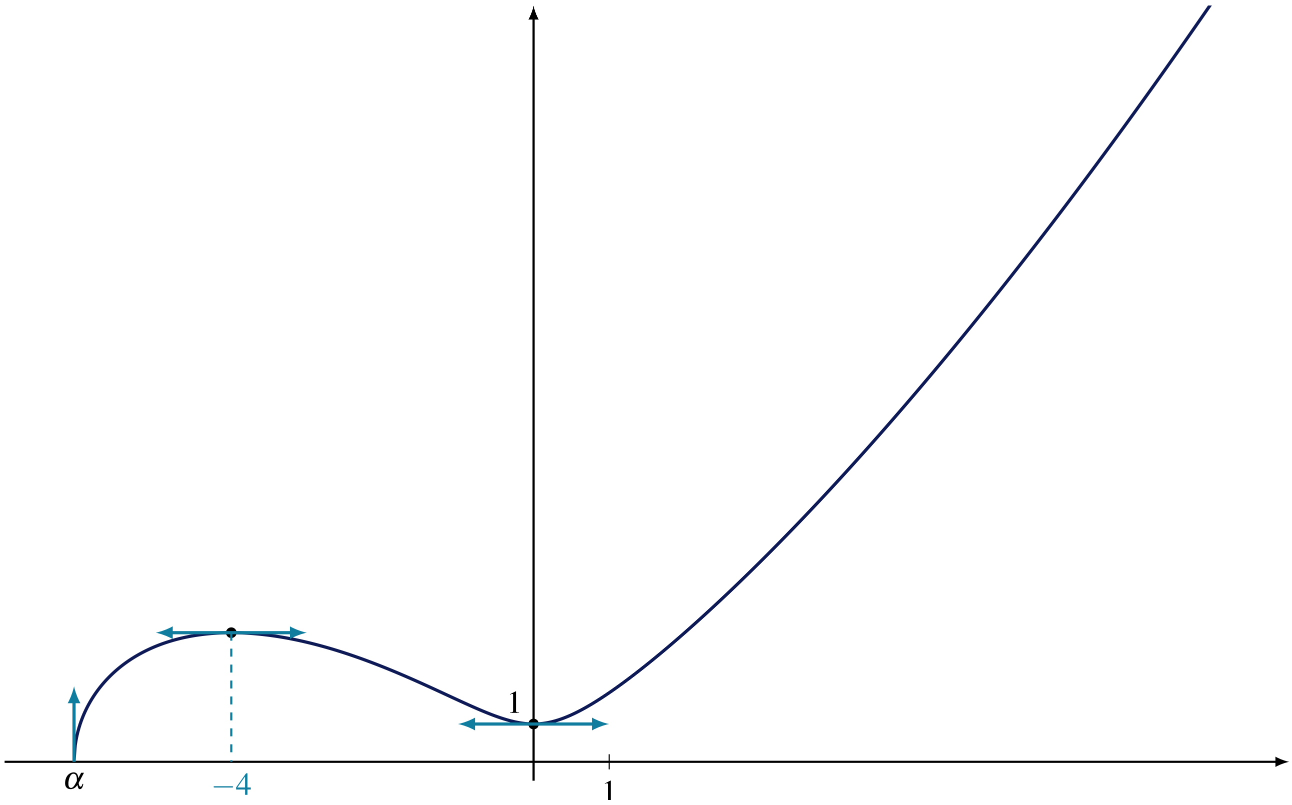
  f est continue et strictement monotone sur I_k, $k = 1,\ 2,\ 3$.

  De plus, d'après les variations de f, $0 \in f(I_k)$, $k = 1,\ 2,\ 3$.

  Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur chacun des intervalles I_k, $k = 1,\ 2,\ 3$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que chacun d'eux.

  Donc l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles :

$$\boxed{\alpha \approx -1,381 \quad ; \quad \beta \approx 0,205 \quad ; \quad \gamma \approx 1,176}$$



■ Corrigé de l'exercice 8. [Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 On peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)} \quad \text{pour } x \neq 0$$
$$= \frac{2\sqrt{x}-1}{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}$$

Or,

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (2\sqrt{x}-1) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right) = 1$

Ainsi, par quotient,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

2 *a.* f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$u(x) = 2x - \sqrt{x}$ $\qquad$ $v(x) = 2 + \sqrt{x}$

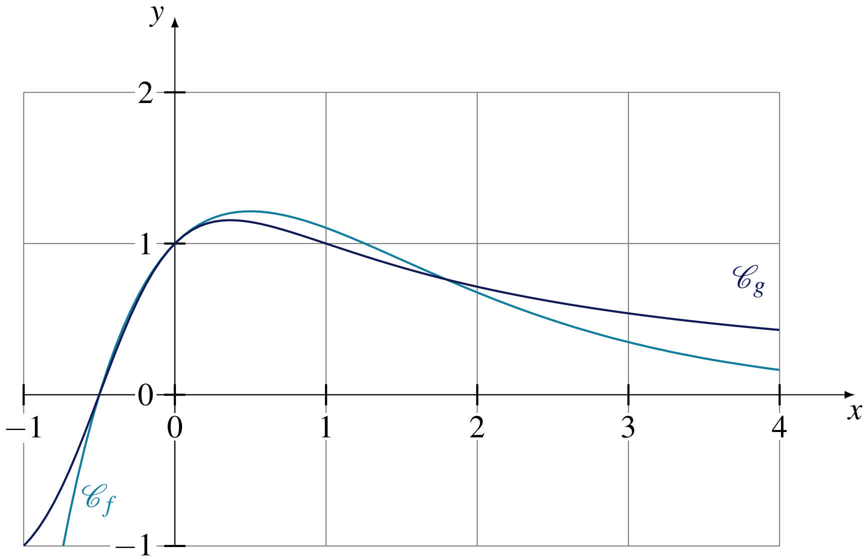
$u'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Partie B : étude de la position relative de deux courbes

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ sont notées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et sont représentées ci-dessous :



1 Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0\,;1)$ et admettent en ce point la même tangente.

2 *a.* Démontrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$$

où φ est la fonction étudiée dans la partie A.

b. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2 $\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}+1\leqslant 0 \iff X^2-2X+1\leqslant 0$ avec $X=\mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned} &\iff (X-1)^2\leqslant 0\\ &\iff (X-1)^2=0 \text{ car } (X-1)^2 \text{ est toujours positif ou nul}\\ &\iff X=1\\ &\iff \mathrm{e}^x=1\\ &\iff x=0\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $\boxed{\mathscr{S}=\{0\}}$

3 $6\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-1\leqslant 0 \iff 6X^2+X-1\leqslant 0$ avec $X=\mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned} &\iff (3X-1)(2X+1)\leqslant 0 \text{ (voir exercice 4 pour les racines)}\\ &\iff \left(3\mathrm{e}^x-1\right)\left(2\mathrm{e}^x+1\right)\leqslant 0\\ &\iff 3\mathrm{e}^x-1\leqslant 0 \text{ (car } 2\mathrm{e}^x+1>0 \text{ pour tout réel } x)\\ &\iff \mathrm{e}^x\leqslant \frac{1}{3}\\ &\iff x\leqslant -\ln 3\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $\boxed{\mathscr{S}=]-\infty\,;-\ln 3]}$

4 $2\mathrm{e}^{2x}-7\mathrm{e}^{x}+3<0 \iff 2X^2-7X+3<0$ avec $X=\mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned} &\iff (2X-1)(X-3)<0 \text{ (voir exercice 4 pour les racines)}\\ &\iff \left(2\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^x-3\right)<0\end{aligned}$$

De plus, $\boxed{\begin{aligned}2\mathrm{e}^x-1>0 &\iff \mathrm{e}^x>\frac{1}{2}\\ &\iff x>-\ln 2\end{aligned}}$ et $\boxed{\begin{aligned}\mathrm{e}^x-3>0 &\iff \mathrm{e}^x>3\\ &\iff x>\ln 3\end{aligned}}$, d'où le tableau suivant.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
$2\mathrm{e}^x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-3		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(2\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^x-3\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution de l'inéquation $2\mathrm{e}^{2x}-7\mathrm{e}^{x}+3<0$ est donc $\boxed{\mathscr{S}=]-\ln 2\,;\ln 3[}$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 *a.*
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\mathrm{e}^{-x}\right)=2$

Ainsi, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$.

b. $f(x)=2x-2-x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}$ donc :

$$f(x)-(2x-2)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^{-x}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ (cours) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-2)]=0\,,$$

ce qui signifie que <u>la droite d'équation $y=2x-2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$</u>.

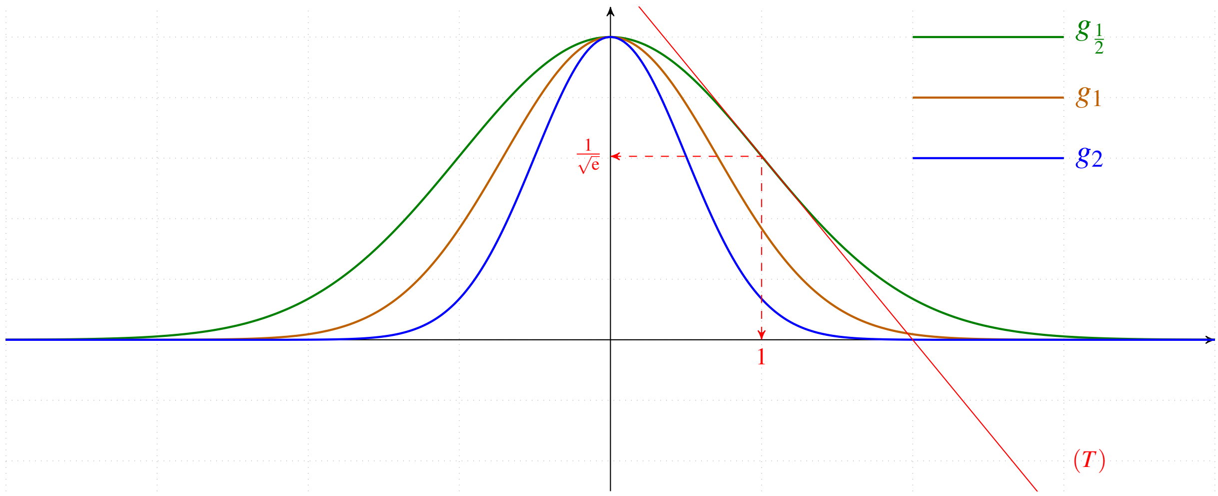
4 $g_k''(x) = -2k\mathrm{e}^{-kx^2} - 2kx \times (-2kx)\mathrm{e}^{-kx^2}$.

$= -2k\mathrm{e}^{-kx^2}(1-2kx^2)$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g_k''(x) = 0 &\Longleftrightarrow 1 - 2kx^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{2k} \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2k}} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2k}} (k > 0) \end{aligned}$$

5 Nous avons les courbes suivantes :



6 $$\begin{aligned} h \leqslant k &\Leftrightarrow -k \leqslant -h \\ &\Leftrightarrow -kx^2 \leqslant -hx^2 && \text{car } x^2 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-kx^2} \leqslant \mathrm{e}^{-hx^2} && \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante} \\ &\Leftrightarrow g_k(x) \leqslant g_h(x) \end{aligned}$$

7 Une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_{g_{\frac{1}{2}}}$ au point d'abscisse α est :

$$y = g'_{\frac{1}{2}}(\alpha)(x-\alpha) + g_{\frac{1}{2}}(\alpha)$$

$$y = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}(x-1) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}x + \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}}.$$

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On définit alors la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{2n}.$$

1 Calculer v_0, v_1 puis v_2. On donnera des valeurs approchées au millième.

2 Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(f(u_{2n}))$.

3 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$\frac{1}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 1.$$

4 En déduire que (v_n) converge.

5 En déduire que (u_n) et (v_n) ont la même limite α, où α est la valeur introduite dans la partie B.

Partie D

On considère l'algorithme suivant :

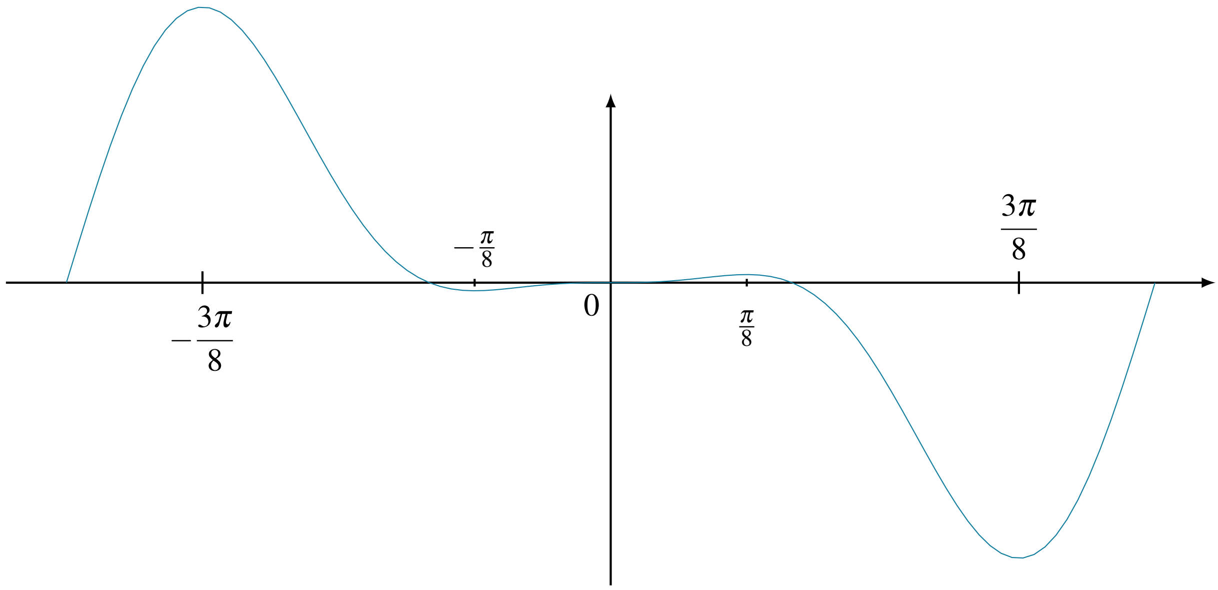
```
   Entrées
1      a nombre réel
2      n nombre entier
3      d nombre réel
   Traitement
4      a prend la valeur 1
5      n prend la valeur 0
6      d prend la valeur 1
7      Tant que d > 10^(-6)
8          d prend la valeur a
9          a prend la valeur ln(1+1/a)
10         a prend la valeur ln(1+1/a)
11         n prend la valeur n+1
12         d prend la valeur d-a
13     Fin du Tant que
   Sortie
14     Afficher a
```

1 Un élève affirme qu'il y a une erreur car les lignes 9 et 10 sont identiques.
Expliquer en quoi cet élève se trompe.

2 Que doit-on écrire pour ne pas répéter ces deux lignes ?

3 Implanter cet algorithme sur votre calculatrice puis donner une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

5 La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



■ Corrigé de l'exercice 10.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 Le triangle ABD est rectangle en B donc :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} \iff \boxed{\mathrm{AD} = \dfrac{4}{\cos\theta}}. \\ \tan\theta = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} \iff \mathrm{BD} = 4\tan\theta \end{cases}$$

On en déduit alors que $\boxed{\mathrm{CD} = 7 + 4\tan\theta}$.

D'après la formule $v = \dfrac{d}{t}$, on déduit que $t_1 = \dfrac{\mathrm{AD}}{30}$, exprimée en heures. Il est plus judicieux d'exprimer cette durée en minutes en remarquant que :

$$30 \text{ km/h} = 30 \times \frac{1\,000 \text{ m}}{60 \text{ min}} = 500 \text{ m/min}.$$

Ainsi, $\boxed{t_1 = \dfrac{4}{500\cos\theta}}$.

De même, 60 km/h = 1 000 m/min donc $\boxed{t_2 = \dfrac{7 + 4\tan\theta}{1\,000}}$.

■ Corrigé de l'exercice 4. [Retour à l'énoncé de l'exercice]

$$\begin{aligned}
\overline{\omega} \text{ est solution de } (E) &\iff a\overline{\omega}^2 + b\overline{\omega} + c = 0 \\
&\iff \overline{a\overline{\omega}^2 + b\overline{\omega} + c} = 0 \\
&\iff \overline{a\overline{\omega}^2} + \overline{b\overline{\omega}} + \overline{c} = 0 \quad \text{car } \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \\
&\iff \overline{a}\,\overline{\overline{\omega}^2} + \overline{b}\,\overline{\overline{\omega}} + \overline{c} = 0 \quad \text{car } \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'} \\
&\iff \overline{a}\,\overline{\overline{\omega}}^2 + \overline{b\overline{\omega}} + \overline{c} = 0 \quad \text{car } \overline{z^n} = \overline{z}^n \\
&\iff \overline{a}\omega^2 + \overline{b}\omega + \overline{c} = 0 \quad \text{car } \overline{\overline{z}} = z \\
&\iff a\omega^2 + b\omega + c = 0 \quad \text{car } a, b \text{ et } c \text{ sont réels} \\
&\iff \omega \text{ solution de } (E)
\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 5. [Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 *a*. Voir figure en fin de correction.
B et C sont alignés car $z_B = -z_C$.

b. B' a pour affixe :

$$\begin{aligned}
z_{B'} &= \frac{(1+\mathrm{i})^2}{\mathrm{i}-(1+\mathrm{i})} \\
&= \frac{1+2\mathrm{i}-1}{-1} \\
\end{aligned}$$
$$\boxed{z_{B'} = -2\mathrm{i}}$$

C' a pour affixe :

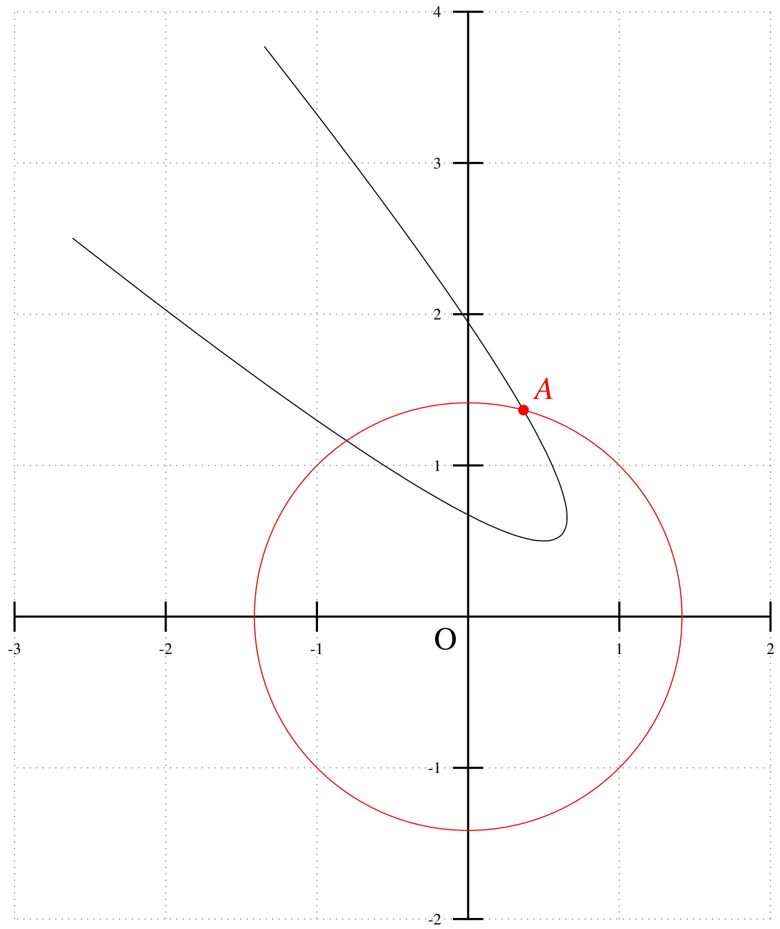
$$\begin{aligned}
z_{C'} &= \frac{(-1-\mathrm{i})^2}{\mathrm{i}-(-1-\mathrm{i})} \\
&= \frac{1+2\mathrm{i}-1}{1+2\mathrm{i}} \\
&= \frac{2\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} \\
&= \frac{2\mathrm{i}+4}{1^2+2^2}
\end{aligned}$$
$$\boxed{z_{C'} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}}$$

2 On résout l'équation $f(z) = z$:

$$\begin{aligned}
f(z) = z &\iff \frac{z^2}{\mathrm{i}-z} = z \\
&\iff z^2 = z(\mathrm{i}-z) \\
&\iff 2z^2 - \mathrm{i}z = 0 \\
&\iff z(2z-\mathrm{i}) = 0 \\
&\iff z = 0 \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{2}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

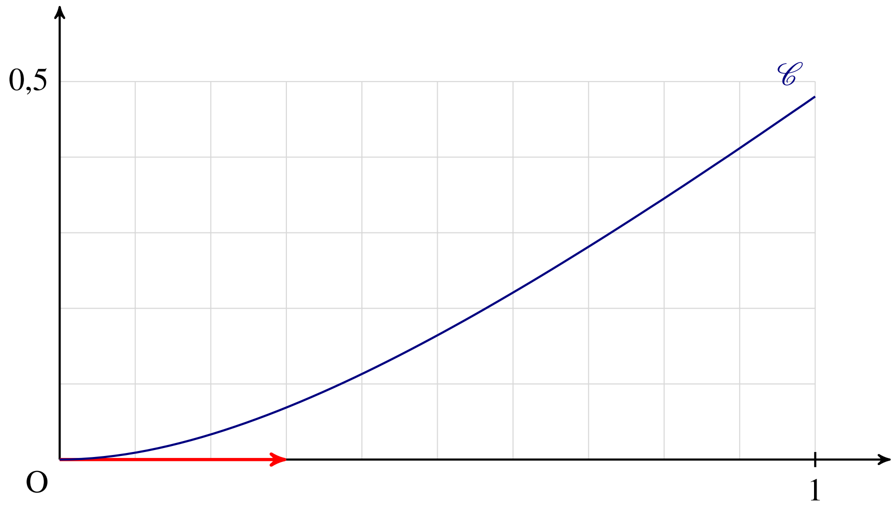
Par conséquent, f admet deux points fixes d'affixes respectives 0 et $\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

3 L'affixe du point A est un point fixe de $\mathscr{F}$; par conséquent, le point A est sur l'ensemble tracé. Or, $z_A = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$ donc A appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, c'est-à-dire au cercle de centre O passant par le point de coordonnées $(1;1)$.
Ainsi, A est le point d'intersection de ce cercle avec l'ensemble tracé, dont l'abscisse est positive.



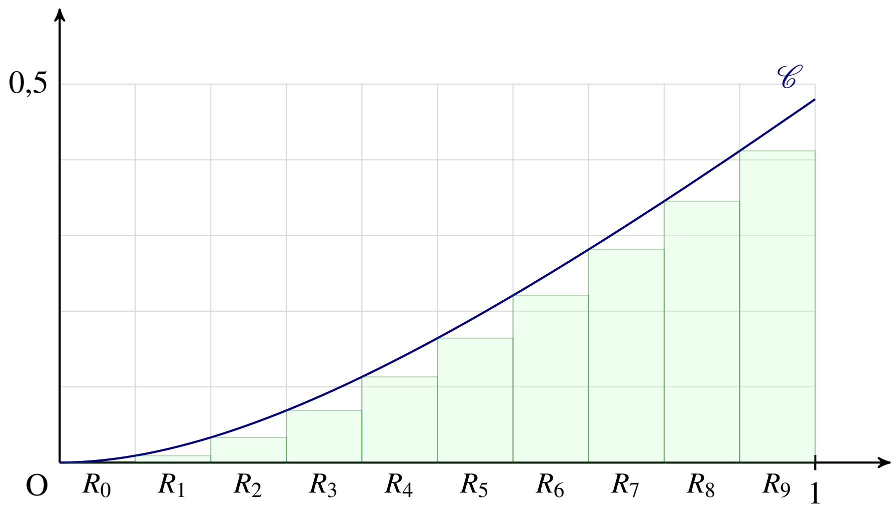
4 $f'(0) = \dfrac{2\ln(0+1)}{0+1} = 0$ donc la tangente à $\mathscr{C}$ en 0 est horizontale. Or, $f(0) = 0$ donc $\mathscr{T}$ est l'axe des abscisses.

5



Partie B : Calcul de l'approximation de l'aire

1



2 L'aire du rectangle R_k est :

$$A_k = \frac{1}{10} \times f\left(\frac{k}{10}\right),$$

où $\dfrac{1}{10}$ représente la mesure de la largeur et $f\left(\dfrac{k}{10}\right)$ sa longueur.
La somme des aires des rectangles est :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{10} \times f\left(\frac{k}{10}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(f(0) + f(1) + \cdots + f(9)\right) \\ \boxed{A \approx 0,165 \text{ u.a.}} \\ &\approx 0,165 \times 100 \text{ cm}^2 \\ \boxed{A \approx 16,487 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = (n+1)!\left[\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{n+1-k}}{k!}\right]$$

(ici, j'ai considéré le signe « $-$ » comme étant (-1) et je l'ai inséré dans la somme)

$$= (n+1)!\left[\frac{(-1)^{n+1-(n+1)}}{(n+1)!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{n+1-k}}{k!}\right]$$

(j'écris le terme avant la somme de la même manière que les termes de la somme elle-même afin de l'incorporer à l'intérieur du sigma)

$$= (n+1)!\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^{(n+1)-k}}{k!}$$

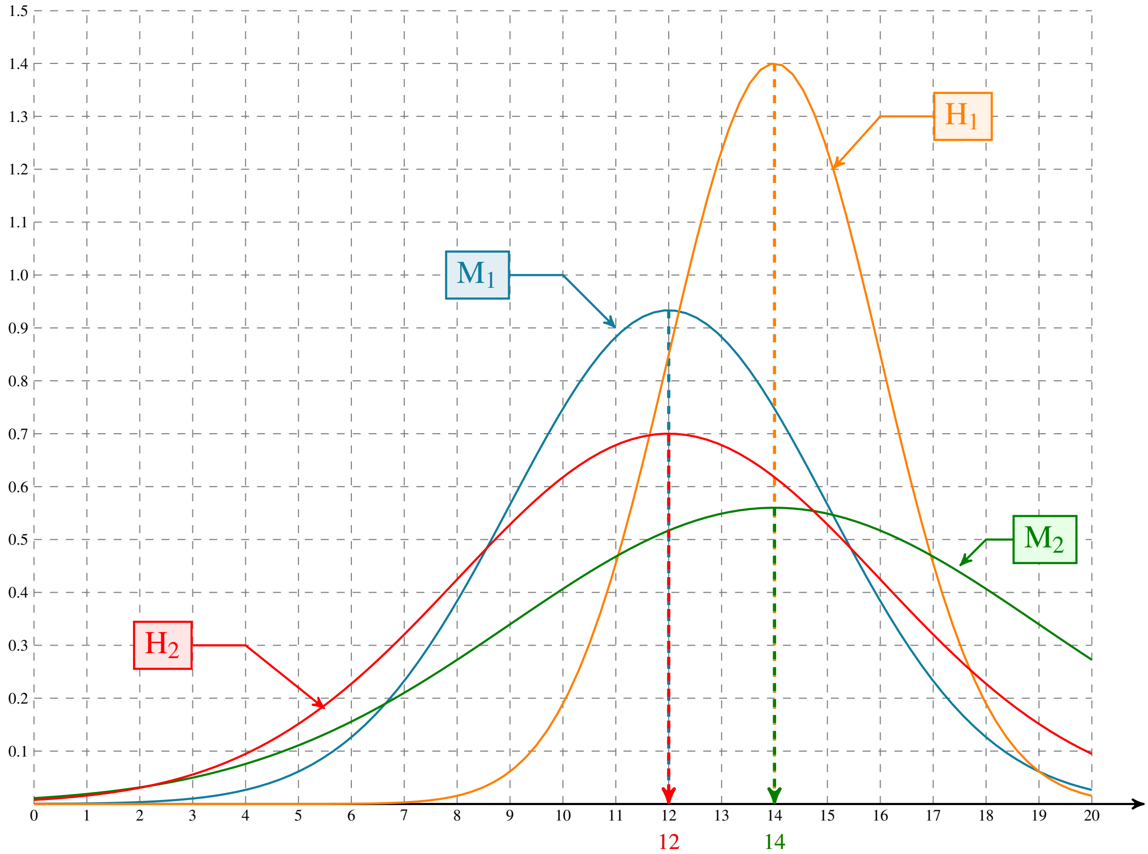
L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $a_n = n!\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!}$.

8 Un programme Python possible est le suivant :

```
import math
from math import factorial as fac
from math import exp

def a(n):
    if n > 1:
        s = 0
        for k in range(2,n+1):
            s+=fac(n)*(-1)**(n-k)/fac(k)
        return s
    else:
        if n == 0:
            return 1
        else:
            return 0

def b(n):
    return (-1)**(n+1)*fac(n)

def I(n):
    return a(n)*exp(1)+b(n)
```

En tapant `I(4)` par exemple, on verra s'afficher une valeur approchée de I_4.

■ Corrigé de l'exercice 19. [Retour à l'énoncé de l'exercice]



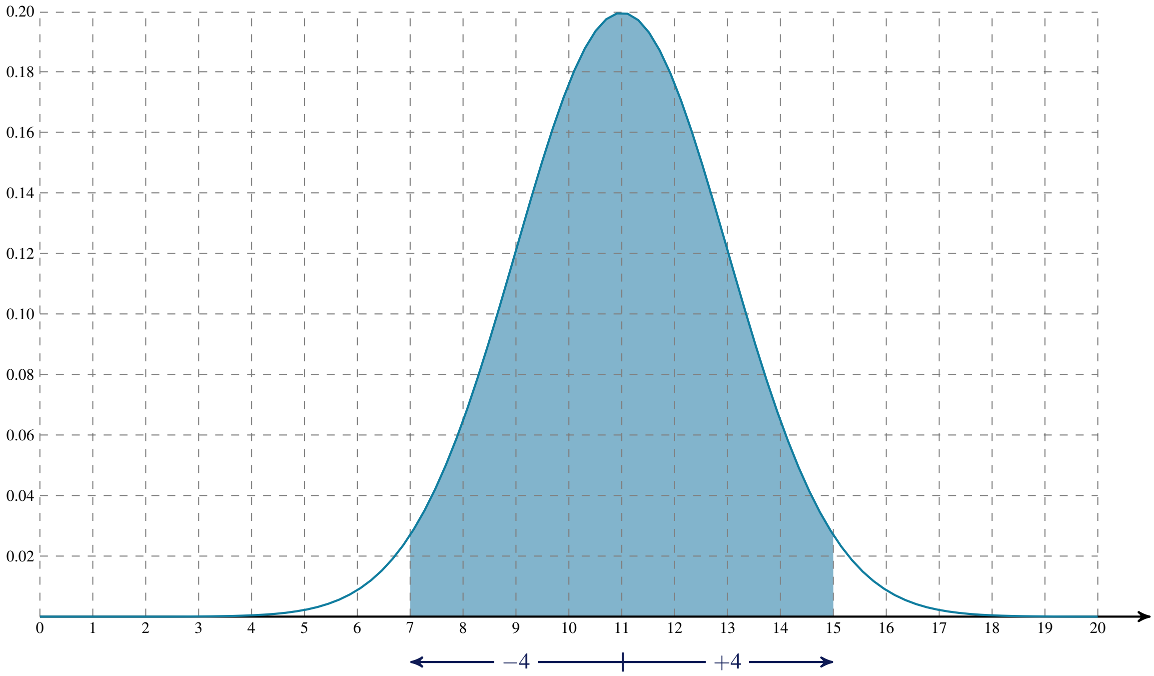
- On regarde en premier l'axe de symétrie des courbes : ils correspondent aux moyennes.
  Ainsi, les courbes verte et orange correspondent à une variable aléatoire dont la moyenne est égale à 14 ; elles ne peuvent donc que représenter H_1 et M_2.
  Les deux autres courbes représentent donc M_1 et H_2.
- On regarde ensuite « l'écartement » des courbes : plus il est grand, plus l'écart-type est grand.
  Ainsi, si l'on compare les courbes verte et orange, c'est la verte qui a le plus grand « écartement » donc elle correspond à M_2 ; la courbe orange est donc pour H_1.
- Les courbes bleue et rouge ont un « écartement » similaire en apparence mais ce n'est pas le cas car le sommet de la bleue est au-dessus de celui de la rouge, ce qui signifie que son écartement est plus petit (elle est plus affinée). La courbe bleue correspond donc à M_1 et donc la rouge correspond à H_2.

■ Corrigé de l'exercice 20. [Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 On regarde l'axe de symétrie de la courbe : il passe par 11, donc $\underline{\mu = 11}$.

2 Un carreau du quadrillage représente 0,02 unité. Il faut donc trouver un intervalle centré en 11 sur lequel l'aire sous la courbe admet $\dfrac{0,95}{0,02} = 47,5$ de ces carreaux.
Il suffit alors de compter à droite de 11 et sous la courbe un peu moins de 24 carreaux (la moitié de 47,5 étant égale à 23,75). On va alors jusqu'à 15.

Ainsi, sur $[7;15]$, il y a 47,5 de ces carreaux :



On peut donc considérer que $P(7 \leqslant X \leqslant 15) \approx 0,95$.

3 D'après le cours,

$$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

ainsi, d'après ce que nous avons écrit précédemment,

$$2\sigma \approx 4 \qquad \text{donc} \qquad \underline{\sigma \approx 2}.$$

Deuxième partie

Enseignement de spécialité

■ Corrigé de l'exercice 19.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1
- $n=1$: $a=7$ et $b=7$ donc $\operatorname{pgcd}(a;b)=7$.
- $n=11$: $a=47$ et $b=57$ donc $\operatorname{pgcd}(a;b)=1$.
- $n=15$: $a=63$ et $b=77$ donc $\operatorname{pgcd}(a;b)=7$.

2 $$\begin{aligned}5a-4b&=5(4n+3)-4(5n+2)\\&=20n+15-20n-8\\&=7.\end{aligned}$$

Ainsi, $5\left(\dfrac{a}{7}\right)-4\left(\dfrac{b}{7}\right)=1$. De plus, 5 et 7 sont premiers entre eux, et il en est de même pour 4 et 7.

Par conséquent, a et b sont des multiples de 7 et donc $d=\operatorname{pgcd}(a;b)$ peut valoir 1 ou 7.

3 *a.* $4n+3=7k \iff 4n-7k=-3$.

Une solution particulière est $(n_0;k_0)=(1;1)$. On a alors :

$$\begin{aligned}4\times1-7\times1&=-3\\4\times n-7\times k&=-3\end{aligned}$$

donc :

$$4(1-n)-7(1-k)=0$$

soit :

$$4(1-n)=7(1-k).$$

4 et 7 étant premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss :

$$\begin{cases}1-k=4q\\1-n=7q\end{cases}\qquad q\in\mathbb{Z}$$

soit :

$$\begin{cases}k=1-4q\\n=1-7q\end{cases}\qquad q\in\mathbb{Z}_-\ \text{(car } n \text{ et } k \text{ doivent être positifs).}$$

b. Par un raisonnement analogue à celui adopté à la question précédente, on a :

$$\begin{cases}k'=1-5q'\\n=1-7q'\end{cases}\qquad q'\in\mathbb{Z}_-.$$

4 D'après la question précédente, si le reste de la division euclidienne de n par 7 est égal à 1, alors a et b sont des multiples de 7 et donc $d=7$.

Dans le reste des cas (sans jeu de mot), $d=1$.

■ Corrigé de l'exercice 20.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

a n'est pas divisible par 3 donc $a\equiv1 \mod 3$ ou $a\equiv2 \mod 3$.

Ainsi, $a^6\equiv1^6\equiv1 \mod 3$ ou $a\equiv2^6\equiv64\equiv1 \mod 3$ car $64=3\times21+1$.

Ainsi, $a^6-b^6\equiv1-1\equiv0 \mod 3$ et donc $\underline{a^6-b^6 \text{ est divisible par 3.}}$

■ Corrigé de l'exercice 35.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

Voici les fonctions :

```
def pgcd(a,b): # Calcul du pgcd de a et b
    while b!=0:
        a,b=b,a%b
    return a
def chiffrementAffine(a,b,L): # fonction de chiffrement affine
        if (pgcd(a,26)==1):
                alphabet=["A","B","C","D","E","F","G","H","I","J","K","L","M",
   "N","O","P","Q","R","S","T","U","V","W","X","Y","Z"]
                x=alphabet.index(L)
                y=(a*x+b)%26
                return alphabet[y]
        else:
                return "Chiffrement␣impossible."
def inverse(a): # Calcul de l'inverse d'un nombre modulo 26
        x=0
        while (a*x%26!=1):
                x=x+1
        return x
def dechiffrementAffine(a,b,L): # Fonction de déchiffrement
        if (pgcd(a,b)==1):
                alphabet=["A","B","C","D","E","F","G","H","I","J","K","L","M",
   "N","O","P","Q","R","S","T","U","V","W","X","Y","Z"]
                x=alphabet.index(L)
                y=(inverse(a)*(x-b))%26
                return alphabet[y]
        else:
                return "Déchiffrement␣impossible."
def crypt(M,a,b): # Affichage du mot chiffré
        mot = []
        for i in range(0,len(M)):
                mot.append(chiffrementAffine(a,b,M[i]))
        print ("".join(mot))
def decrypt(M,a,b): # Affichage du mot déchiffré
        mot = []
        for i in range(0,len(M)):
                mot.append(dechiffrementAffine(a,b,M[i]))
        print ("".join(mot))
```

En tapant : `crypt("MATHS",15,8)`, on voit : « GIHJ » et en tapant `decrypt("MIMVC",5,8)`, on voit : « GAGNE ».

Calculs matriciels

Énoncés

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

4 février 2018

(A) Exercices d'application du cours

(R) Exercices de réflexion

Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Opérations sur les matrices

■ Exercice 1. Opérations élémentaires

★☆☆☆☆ (A)

Corrigé page 297

On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A+B$.
2. Calculer $2A$.
3. Calculer AC.
4. Calculer CA.

■ Exercice 2. À la recherche d'une matrice

★★☆☆☆ (R)

Corrigé page 298

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $AI = IA = A$.
2. Trouver la matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $AB = I$.
3. Vérifier que $BA = I$.

■ Exercice 3. Puissance d'une matrice et raisonnement par récurrence

★★★☆☆ (R)

Corrigé page 298

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $(I+A)^n = I + nA$.
3. En déduire une expression de B^n en fonction de n.

2 • **Initialisation.**
$(I+A)^1 = I+A = I+1A$ donc l'initialisation est faite.

• **Hérédité.**
Supposons que pour un entier k strictement positif donné, $(I+A)^k = I+kA$.

$$\begin{aligned}(I+A)^{k+1} &= (I+A)^k(I+A)\\ &= (I+kA)(I+A) && \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= I^2+IA+kAI+kA^2 && \text{en distribuant}\\ &= I+A+kA && \text{car } A^2 \text{ s'annule et } IA = AI = A\\ &= I+(1+k)A.\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.
L'égalité est alors vraie pour tout entier naturel non nul.

• On peut remarquer que $B = I+A$; ainsi, d'après la question précédente,

$$\boxed{B^n = I+nA = \begin{pmatrix} 1+2n & 4n \\ -n & 1-2n \end{pmatrix}}$$

Corrigé de l'exercice 4.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 $X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$

2 On veut que $X^2 = I_2$ donc $\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a le système : $\begin{cases} a^2+bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2+bc = 0 \end{cases}$

On déduit de l'équation $b(a+d) = 0$ que $b = 0$ ou $a+d = 0$, puis de l'équation $c(a+d) = 0$ que $c = 0$ ou $a+d = 0$.

• Si $b = 0$, alors $a^2 = 0$ (donc $a = 0$), $d^2 = 0$ (donc $d = 0$) et $c(a+d) = 0$ donc $c \times 0 = 0$, ce qui est toujours possible.

Dans ce cas, $\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}}$, $c \in \mathbb{R}$.

• Si $b \neq 0$, alors $a+d = 0$ donc $d = -a$. Ainsi, $a^2+bc = 0$ et donc $c = -\dfrac{a^2}{b}$.

Dans ce cas, $\boxed{X = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}}$

Corrigé de l'exercice 5.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$.

2 • Si $n = 3k$, $A^n = (2I_3)^k = 2^k I_3$.
• Si $n = 3k+1$, $A^n = (2I_3)^k A = 2^k A$.
• Si $n = 3k+2$, $A^n = (2I_3)^k A^2 = 2^k A^2$.