

Disponible sur *mathweb.fr*

**211 exercices de  
mathématiques  
pour Terminale S**

**Enseignement obligatoire et de spécialité**

**Stéphane PASQUET**

4 février 2018

# Sommaire

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

4 février 2018

## Enseignement obligatoire

<b>I</b>	<b>Continuité &amp; dérivabilité</b>	<b>2</b>
I.1	Calculs élémentaires en $+\infty$	2
I.2	En $+\infty$ avec des formes indéterminées	2
I.3	En un nombre fini avec des formes indéterminées	2
I.4	Règle de l'Hôpital	3
I.5	Équation $3x^3 - 5x + 1 = 0$	3
I.6	Un théorème général	3
I.7	Trouver un domaine de définition	3
I.8	Fonction $f : x \mapsto \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$	3
I.9	Fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - 2x$ et $g : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$	4
I.10	Prolongement par continuité de $f : x \mapsto \frac{x-2}{\sqrt{4-x}-2}$ en 2	4
I.11	Prolongement par continuité de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$ en 1	5
I.12	Fonction $f : x \mapsto \frac{ 2x^2-x-1 }{\sqrt{1-x^2}}$	5
I.13	Approximation d'un angle par la longueur d'un segment	6
<b>II</b>	<b>Fonction exponentielle</b>	<b>25</b>
II.1	Produits, quotients et puissances	25
II.2	Simplification d'expressions	25
II.3	Équations	25
II.4	Équations avec changement de variable	26
II.5	Inéquations	26
II.6	Inéquations avec changement de variable	26
II.7	Fonction $f : x \mapsto (x-1)(2-e^{-x})$	26
II.8	Fonction $f : x \mapsto e^{2x} - (x+1)e^x$	27
II.9	Courbe de Gauss	28
II.10	Fonction $f : x \mapsto e^{x-\sqrt{x}}$	29
II.11	Fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}e^x$	29
II.12	Fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	29
II.13	Fonction $f_k : x \mapsto \ln(e^x + kx) - x$	30
II.14	Fonction $f(x) = (2x+1)e^{-x}$	30

<b>III</b>	<b>Logarithme népérien</b>	<b>47</b>
III.1	Simplification d'écritures	47
III.2	Équations	47
III.3	Inéquations	47
III.4	Démonstration de cours : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$	48
III.5	Limites	48
III.6	Limites	48
III.7	Calculs de dérivées	49
III.8	Fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$ sans consignes	49
III.9	Fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$	49
III.10	Fonction $f : x \mapsto (x+1)\ln(x^2 - 2x + 1)$	49
III.11	Comparaison de $\pi^e$ et $e^\pi$	50
III.12	Concentration de bactéries dans le corps	50
III.13	Fonction $f : x \mapsto (x^2 + 1)\ln x - x$	51
III.14	Équation $e^x - \ln x = 0$	52
III.15	Étude de la fonction $f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$	52
III.16	Fonction $f : x \mapsto \frac{2 \ln x}{x[(\ln x)^2 + 1]}$	53
III.17	Étude de la fonction $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$	54
III.18	Détermination de coefficients (le retour)	54
<b>IV</b>	<b>Suites</b>	<b>81</b>
IV.1	Démontrer l'égalité : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	81
IV.2	Inégalité de Bernoulli	81
IV.3	Formule du binôme de Newton	81
IV.4	Calcul de la limite de $\frac{n + \cos(n)}{n^2}$	82
IV.5	Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$	82
IV.6	Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$	82
IV.7	Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{4x-1}{4x}$	83
IV.8	Suite définie par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$	83
IV.9	Suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$	83
IV.10	Suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$	84
IV.11	Suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3}$	84
IV.12	Suite définie par $u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$	84
IV.13	Équation $e^x = \frac{1}{x}$	85
IV.14	Suite de points, suites imbriquées	86
IV.15	Suites imbriquées	87
IV.16	Avec un logarithme	87
IV.17	Des suites dans les probabilités	87
IV.18	Avec une suite auxiliaire et un logarithme	89
IV.19	Étude d'une fonction $\ln$ et suite extraite	89
IV.20	Suite $(\alpha_n)$ de solution d'équations	91
IV.21	La puce (probabilités et suites)	91
IV.22	Étude générale des suites de la forme $u_{n+1} = \lambda u_n + P(n)$	92
IV.23	Étude générale des suites imbriquées	93
IV.24	Méthode de Newton	94
IV.25	L'escargot de Gardner	95

<b>V</b>	<b>Trigonométrie</b>	<b>129</b>
V.1	Équations trigonométriques	129
V.2	Équations avec changement de variable	129
V.3	Inéquations avec changement de variable	129
V.4	Inéquations trigonométriques	130
V.5	Calcul de limites	130
V.6	Étude de la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{1+\sin x}$	130
V.7	Encadrement de $\cos x$	131
V.8	Fonction $x \mapsto \cos^3 x \cos(3x)$	131
V.9	Fonction $x \mapsto \sin^3 x \cos(3x)$	131
V.10	D'après un sujet de bac, Nouvelle Calédonie 2005	132
<b>VI</b>	<b>Probabilités conditionnelles</b>	<b>149</b>
VI.1	Une histoire de QCM, Amérique du Sud 2009	149
VI.2	Sacs défectueux, La Réunion 2009	150
VI.3	MP3 défectueux, Polynésie 2009	150
VI.4	Une école à trois classes	151
VI.5	Urne et fonction rationnelle	151
VI.6	Agence TOCAR	152
VI.7	Ordinateur et automobile chez les étudiants	152
VI.8	Jeanne et son portable	153
VI.9	Enquête dans un journal	153
<b>VII</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>161</b>
VII.1	Calculs algébriques	161
VII.2	Simplification de quotients	161
VII.3	Équations quadratiques	161
VII.4	Équations quadratiques (résultat général)	162
VII.5	Application $z \mapsto \frac{z^2}{i-z}$	162
VII.6	De la forme algébrique à la forme exponentielle	162
VII.7	Ensemble de points	163
VII.8	$i$ exposant $i$	163
VII.9	Application complexe $f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$	163
VII.10	Théorème de Van Aubel	164
VII.11	Point de Vecten	164
VII.12	Construction d'un pentagone régulier	165
VII.13	Calcul des valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{5}$ , $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$	166
VII.14	Théorème de Napoléon	166
VII.15	Cocyclicité	167
VII.16	Application $z \mapsto \frac{\bar{z}}{1+z}$	168
VII.17	Équation et transformation	168
VII.18	Racines $n$ -ièmes de l'unité	169
VII.19	Équation à coefficients complexes et application	169
<b>VIII</b>	<b>Intégration</b>	<b>194</b>
VIII.1	Calculs de primitives	194
VIII.2	Calculs d'intégrales	194
VIII.3	Une intégrale avec le logarithme népérien	194
VIII.4	Décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{1}{x^3-2x^2-5x+6}$	195
VIII.5	$\phi(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt$	195

VIII.6	Aire sous une courbe (1)	196
VIII.7	Aire sous une courbe (2)	197
VIII.8	Aire entre deux courbes	197
VIII.9	Volume d'un bouchon de pêche	198
VIII.10	Trouver le cercle	198
VIII.11	Approximation d'une aire	198
VIII.12	$u_n = \int_1^e x^n \ln(x) dx$	199
VIII.13	$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1} dx$	199
VIII.14	$u_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$	200
VIII.15	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$	200
VIII.16	Avec une exponentielle	200
VIII.17	$u_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$	201
VIII.18	$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$	201
VIII.19	Trouver une abscisse	202

## **IX Lois continues** . . . . . 224

IX.1	Feu tricolore	224
IX.2	À la caisse d'un supermarché	224
IX.3	Temps de trajet	225
IX.4	La partie de jeu vidéo	225
IX.5	La livraison à domicile	225
IX.6	Paradoxe de Bertrand	226
IX.7	La rencontre	226
IX.8	L'aiguille de Buffon	227
IX.9	Durée de vie d'un robot (d'après Bac Liban, 2006)	227
IX.10	D'après Bac France métropolitaine, 2004	227
IX.11	Le laboratoire de Physique (d'après Bac Polynésie, 2004)	228
IX.12	Composants électroniques (d'après Amérique du sud, 2005)	228
IX.13	Le chauffe-eau (avec loi normale et intervalle de fluctuation)	229
IX.14	Vaches laitières de race « Française Frisonne Pis Noir »	230
IX.15	Test de conformité	230
IX.16	Les premiers mots de la vie	230
IX.17	Tests de Q.I.	231
IX.18	Durée de vie d'un appareil	231
IX.19	Trouver la bonne courbe	232
IX.20	Trouver la moyenne et l'écart-type	233

## **X Géométrie dans l'espace** . . . . . 246

X.1	Coplanarité	246
X.2	Section d'un cube par un plan	247
X.3	Section d'un cube par un plan	247
X.4	Représentations paramétriques de droites	248
X.5	Droites confondues	248
X.6	Alignement, rep. param. d'un plan et d'une droite	248
X.7	Intersection de plans	249
X.8	Dans un cube	249
X.9	Polynésie, 2010	250

<b>XI Arithmétique</b>	<b>263</b>
XI.1 Critère de divisibilité	263
XI.2 Avec une somme géométrique	263
XI.3 Divisibilité par 2 et 3	263
XI.4 Divisibilité par 8	263
XI.5 Reste de la division euclidienne par 11	263
XI.6 Critère de divisibilité par 7 sans calculatrice	264
XI.7 Divisibilité par 10 et 20	264
XI.8 Calcul d'un maximum	264
XI.9 Nombres premiers entre eux	264
XI.10 Nombres premiers entre eux	264
XI.11 Nombre premier	264
XI.12 Nombres premiers	265
XI.13 $31x - 28y = 1$	265
XI.14 $108x + 55y = 1$	265
XI.15 Trouver le nombre d'hommes et de femmes	265
XI.16 Avec la notion de pgcd	265
XI.17 Nombres premiers entre eux	265
XI.18 Avec une équation diophantienne	265
XI.19 Divisibilité	266
XI.20 Divisibilité de $a^6 - b^6$ par 3	266
XI.21 Reste d'une division par 14	266
XI.22 Reste d'une division par 7	266
XI.23 Reste d'une division par 7 (bis)	266
XI.24 Reste d'une division par 7 (ter)	266
XI.25 Nombre premier et congruences	266
XI.26 Équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$	266
XI.27 Divisibilité et congruences	267
XI.28 PGCD et congruences	267
XI.29 Combo de congruences	267
XI.30 Équation $x^2 \equiv -11 \pmod{100}$	267
XI.31 Par récurrence	267
XI.32 $2^{2n} + 15n - 1$ modulo 9	267
XI.33 Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité	267
XI.34 Chiffrement affine	268
XI.35 Programmation Python d'un chiffrement affine	268
XI.36 Suites et congruences	269
XI.37 $\sum_{p=1}^n p^3$ et pgcd	269
XI.38 Théorème des restes chinois	270
XI.39 Le « petit » théorème de Fermat	270

<b>XII Calculs matriciels</b>	<b>292</b>
XII.1 Opérations élémentaires	292
XII.2 À la recherche d'une matrice	292
XII.3 Puissance d'une matrice et raisonnement par récurrence	292
XII.4 Équation $X^2 = I_2$	293
XII.5 Puissance d'une matrice $3 \times 3$	293
XII.6 Puissance d'une matrice $3 \times 3$	293
XII.7 Puissance d'une matrice $3 \times 3$	293
XII.8 Avec une matrice nilpotente	293
XII.9 Diagonalisation d'une matrice	294
XII.10 Triangularisation d'une matrice	294
XII.11 Matrice inverse	294
XII.12 Résolutions de systèmes linéaires	295
XII.13 Suites imbriquées et matrices	295
XII.14 Puissance d'une matrice $3 \times 3$	296
XII.15 Système de suites	296
XII.16 Suites imbriquées	296



**Première partie**

**Enseignement obligatoire**



■ Corrigé de l'exercice 2.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

$$1 \quad \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + 4x - 1} = \frac{x^2 \left( 2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left( 3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} \quad \text{pour } x \neq 0$$

$$= \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} \quad \text{pour } x \neq 0$$

Or, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$  donc :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right) = 2$ ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 3$ .

Ainsi, par quotient,  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + 4x - 1} = \frac{2}{3}}$

$$2 \quad \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3} = \frac{\sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left( 2 + \frac{3}{x} \right)} \quad \text{pour } x \neq 0$$

$$= \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left( 2 + \frac{3}{x} \right)} \quad \text{pour } x > 0$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\left( 2 + \frac{3}{x} \right)}$$

Or, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$  donc :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$ ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{3}{x} \right) = 2$ .

Par quotient, on a donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3} = \frac{1}{2}}$

et donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

2 Posons  $f(x) = \cos(5x) - \cos(3x)$  et  $g(x) = \sin(4x) - \sin(3x)$ .

Alors,  $f'(x) = -5 \sin(5x) + 3 \sin(3x)$  et  $g'(x) = 4 \cos(4x) - 3 \cos(3x)$ .

Ainsi,  $f'(0) = 0$  et  $g'(0) = 1$ .

$f$  et  $g$  vérifient toutes les conditions nécessaires pour utiliser la règle de l'Hôpital donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(5x) - \cos(3x)}{\sin(4x) - \sin(3x)} = 0$$

### ■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Posons  $f(x) = 3x^3 - 5x + 1$ .

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

- $f'(x) = 9x^2 - 5$  d'où le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f$	$-\infty$	$\nearrow 3,48$	$\searrow -1,48$	$\nearrow +\infty$	

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 3,48 \quad ; \quad f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx -1,48.$$

- Notons  $I_1 = \left] -\infty; -\frac{\sqrt{5}}{3} \right[$ ,  $I_2 = \left] -\frac{\sqrt{5}}{3}; \frac{\sqrt{5}}{3} \right[$  et  $I_3 = \left] \frac{\sqrt{5}}{3}; +\infty \right[$ .

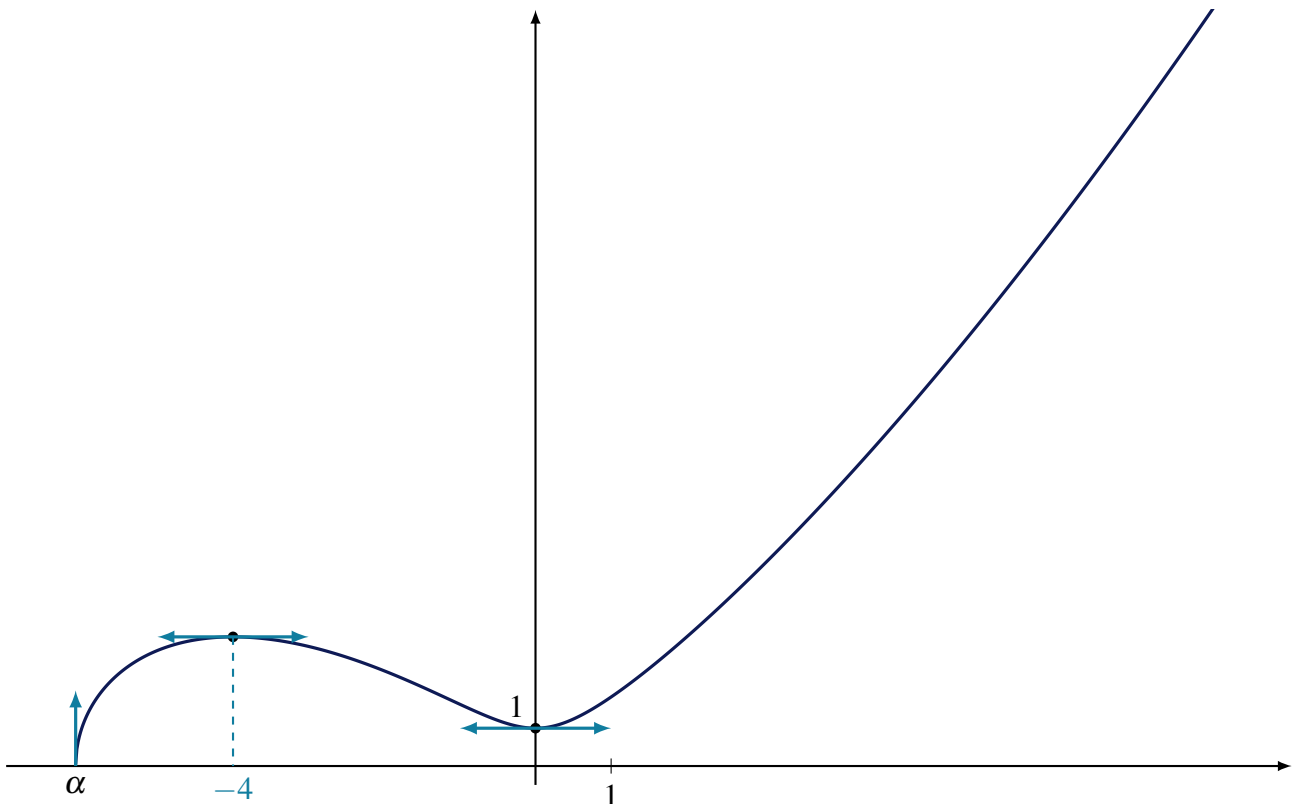
$f$  est continue et strictement monotone sur  $I_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

De plus, d'après les variations de  $f$ ,  $0 \in f(I_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur chacun des intervalles  $I_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution que chacun d'eux.

Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet trois solutions réelles :

$$\alpha \approx -1,381 \quad ; \quad \beta \approx 0,205 \quad ; \quad \gamma \approx 1,176$$



■ **Corrigé de l'exercice 8.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 On peut écrire  $f(x)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)} \quad \text{pour } x \neq 0 \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} \end{aligned}$$

Or,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x}-1) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right) = 1$

Ainsi, par quotient,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

2 a.  $f$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x - \sqrt{x} \\ u'(x) &= 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

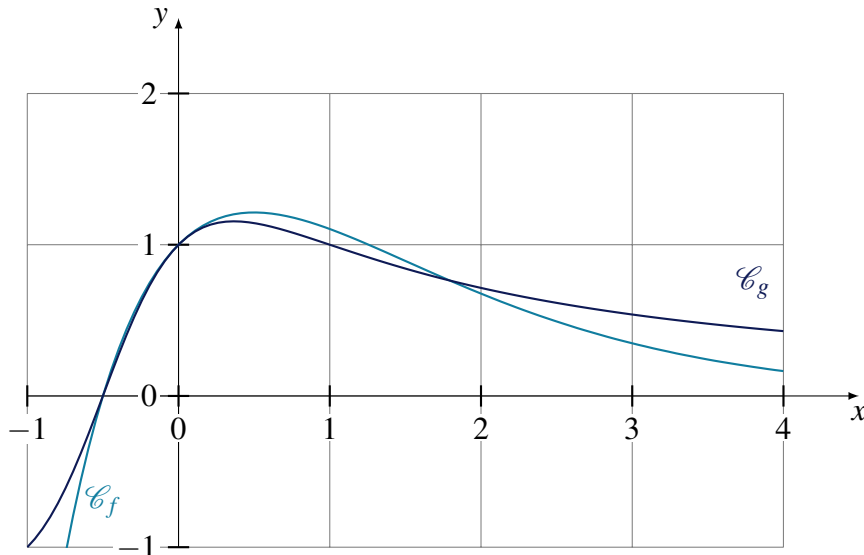
$$\begin{aligned} v(x) &= 2 + \sqrt{x} \\ v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

## Partie B : étude de la position relative de deux courbes

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (2x+1)e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  sont notées respectivement  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  et sont représentées ci-dessous :



- 1 Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées  $(0; 1)$  et admettent en ce point la même tangente.
- 2 a. Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ ,

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$$

où  $\varphi$  est la fonction étudiée dans la partie A.

- b. Étudier le signe de  $f(x) - g(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
- c. En déduire la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

$$\begin{aligned}
2 \quad e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 &\iff X^2 - 2X + 1 \leq 0 \text{ avec } X = e^x \\
&\iff (X - 1)^2 \leq 0 \\
&\iff (X - 1)^2 = 0 \text{ car } (X - 1)^2 \text{ est toujours positif ou nul} \\
&\iff X = 1 \\
&\iff e^x = 1 \\
&\iff x = 0
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc  $\mathcal{S} = \{0\}$

$$\begin{aligned}
3 \quad 6e^{2x} + e^x - 1 \leq 0 &\iff 6X^2 + X - 1 \leq 0 \text{ avec } X = e^x \\
&\iff (3X - 1)(2X + 1) \leq 0 \text{ (voir exercice 4 pour les racines)} \\
&\iff (3e^x - 1)(2e^x + 1) \leq 0 \\
&\iff 3e^x - 1 \leq 0 \text{ (car } 2e^x + 1 > 0 \text{ pour tout réel } x) \\
&\iff e^x \leq \frac{1}{3} \\
&\iff x \leq -\ln 3
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc  $\mathcal{S} = ]-\infty; -\ln 3]$

$$\begin{aligned}
4 \quad 2e^{2x} - 7e^x + 3 < 0 &\iff 2X^2 - 7X + 3 < 0 \text{ avec } X = e^x \\
&\iff (2X - 1)(X - 3) < 0 \text{ (voir exercice 4 pour les racines)} \\
&\iff (2e^x - 1)(e^x - 3) < 0
\end{aligned}$$

De plus,  $2e^x - 1 > 0 \iff e^x > \frac{1}{2} \iff x > -\ln 2$  et  $e^x - 3 > 0 \iff e^x > 3 \iff x > \ln 3$ , d'où le tableau suivant.

$x$	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 3$	$+\infty$
$2e^x - 1$		-	0	+
$e^x - 3$		-	-	0
$(2e^x - 1)(e^x - 3)$		+	0	-

L'ensemble solution de l'inéquation  $2e^{2x} - 7e^x + 3 < 0$  est donc  $\mathcal{S} = ]-\ln 2; \ln 3[$

### ■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
1 \quad a. \quad &\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \\
&\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - e^{-x}) = 2
\end{aligned}$$

Ainsi, par produit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

$$b. \quad f(x) = 2x - 2 - xe^{-x} + e^{-x} \text{ donc :}$$

$$f(x) - (2x - 2) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}.$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  (cours) et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 2)] = 0,$$

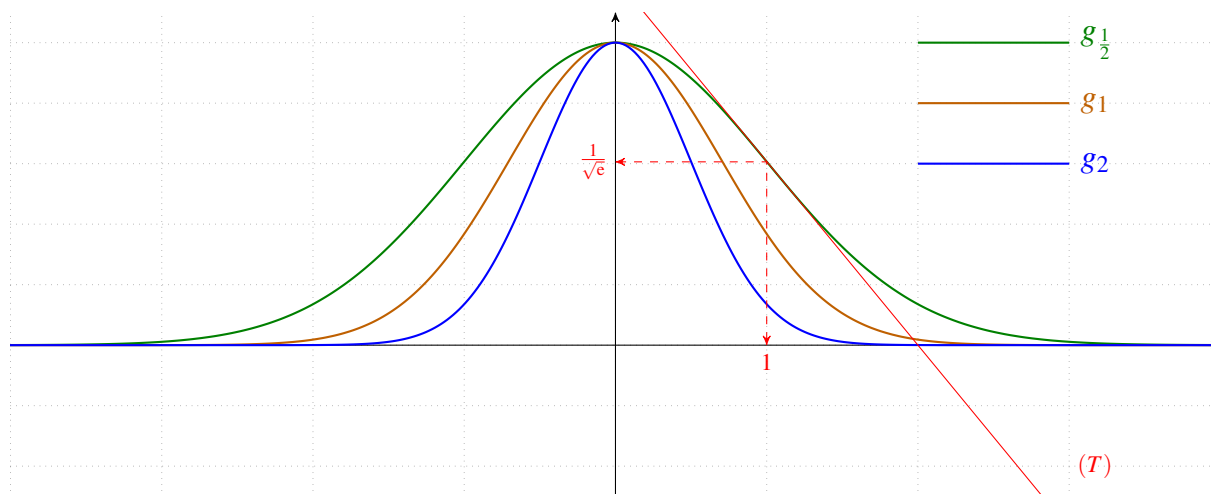
ce qui signifie que la droite d'équation  $y = 2x - 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

$$\begin{aligned}
 4 \quad g_k''(x) &= -2ke^{-kx^2} - 2kx \times (-2kx)e^{-kx^2} \\
 &= -2ke^{-kx^2}(1 - 2kx^2)
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 g_k''(x) = 0 &\iff 1 - 2kx^2 = 0 \\
 &\iff x^2 = \frac{1}{2k} \\
 &\iff x = \frac{1}{\sqrt{2k}} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2k}} \quad (k > 0)
 \end{aligned}$$

5 Nous avons les courbes suivantes :



$$\begin{aligned}
 6 \quad h \leq k &\iff -k \leq -h \\
 &\iff -kx^2 \leq -hx^2 \quad \text{car } x^2 \geq 0 \\
 &\iff e^{-kx^2} \leq e^{-hx^2} \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante} \\
 &\iff g_k(x) \leq g_h(x)
 \end{aligned}$$

7 Une équation de la tangente (T) à  $\mathcal{C}_{g_{\frac{1}{2}}}$  au point d'abscisse  $\alpha$  est :

$$y = g_{\frac{1}{2}}'(\alpha)(x - \alpha) + g_{\frac{1}{2}}(\alpha)$$

$$y = -e^{-\frac{1}{2}}(x - 1) + e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{\sqrt{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}}}$$

### Partie C

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On définit alors la suite  $(v_n)$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{2n}.$$

- 1 Calculer  $v_0, v_1$  puis  $v_2$ . On donnera des valeurs approchées au millièmè.
- 2 Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = f(f(u_{2n}))$ .
- 3 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1.$$

- 4 En déduire que  $(v_n)$  converge.
- 5 En déduire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont la même limite  $\alpha$ , où  $\alpha$  est la valeur introduite dans la partie B.

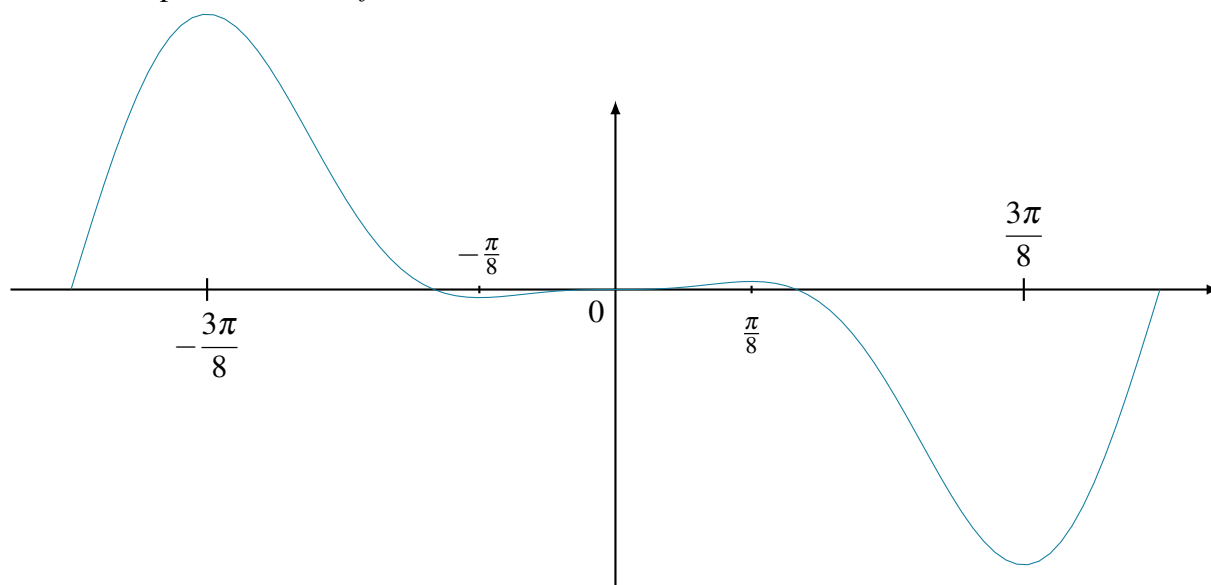
### Partie D

On considère l'algorithme suivant :

	<b>Entrées</b>
1	a nombre réel
2	n nombre entier
3	d nombre réel
	<b>Traitement</b>
4	a prend la valeur 1
5	n prend la valeur 0
6	d prend la valeur 1
7	Tant que $d > 10^{-6}$
8	d prend la valeur a
9	a prend la valeur $\ln(1+1/a)$
10	a prend la valeur $\ln(1+1/a)$
11	n prend la valeur n+1
12	d prend la valeur d-a
13	Fin du Tant que
	<b>Sortie</b>
14	Afficher a

- 1 Un élève affirme qu'il y a une erreur car les lignes 9 et 10 sont identiques. Expliquer en quoi cet élève se trompe.
- 2 Que doit-on écrire pour ne pas répéter ces deux lignes ?
- 3 Implanter cet algorithme sur votre calculatrice puis donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-6}$  près.

5 La courbe représentative de  $f$  est donnée ci-dessous :



■ **Corrigé de l'exercice 10.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Le triangle ABD est rectangle en B donc :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{AB}{AD} \iff AD = \frac{4}{\cos \theta} \\ \tan \theta = \frac{BD}{AB} \iff BD = 4 \tan \theta \end{cases}$$

On en déduit alors que  $CD = 7 + 4 \tan \theta$ .

D'après la formule  $v = \frac{d}{t}$ , on déduit que  $t_1 = \frac{AD}{30}$ , exprimée en heures. Il est plus judicieux d'exprimer cette durée en minutes en remarquant que :

$$30 \text{ km/h} = 30 \times \frac{1000 \text{ m}}{60 \text{ min}} = 500 \text{ m/min.}$$

Ainsi,  $t_1 = \frac{4}{500 \cos \theta}$ .

De même,  $60 \text{ km/h} = 1000 \text{ m/min}$  donc  $t_2 = \frac{7 + 4 \tan \theta}{1000}$ .



■ Corrigé de l'exercice 4.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} \text{ est solution de (E)} &\iff a\bar{\omega}^2 + b\bar{\omega} + c = 0 \\
 &\iff \overline{a\omega^2 + b\omega + c} = 0 \\
 &\iff \overline{a\omega^2} + \overline{b\omega} + \bar{c} = 0 \quad \text{car } \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}' \\
 &\iff \bar{a}\bar{\omega}^2 + \bar{b}\bar{\omega} + \bar{c} = 0 \quad \text{car } \overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}' \\
 &\iff \bar{a}\bar{\omega}^2 + \bar{b}\bar{\omega} + \bar{c} = 0 \quad \text{car } \overline{z^n} = \bar{z}^n \\
 &\iff \bar{a}\omega^2 + \bar{b}\omega + \bar{c} = 0 \quad \text{car } \bar{\bar{z}} = z \\
 &\iff a\omega^2 + b\omega + c = 0 \quad \text{car } a, b \text{ et } c \text{ sont réels} \\
 &\iff \omega \text{ solution de (E)}
 \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

- 1 a. Voir figure en fin de correction.  
 B et C sont alignés car  $z_B = -z_C$ .  
 b. B' a pour affixe :

$$\begin{aligned}
 z_{B'} &= \frac{(1+i)^2}{i - (1+i)} \\
 &= \frac{1+2i-1}{-1} \\
 &= -2i
 \end{aligned}$$

C' a pour affixe :

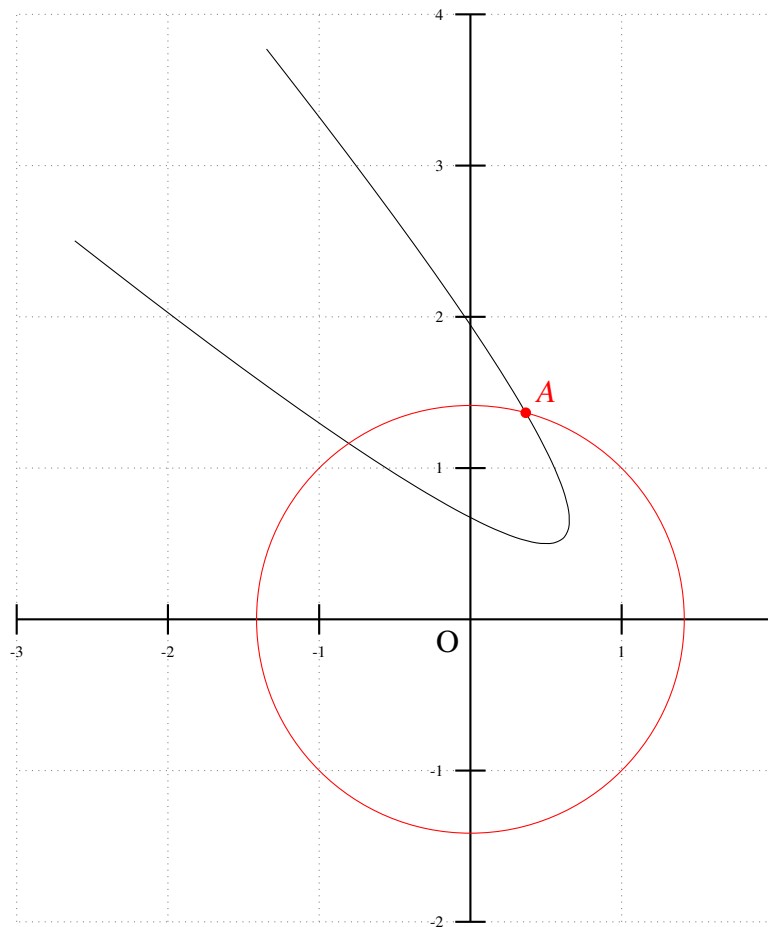
$$\begin{aligned}
 z_{C'} &= \frac{(-1-i)^2}{i - (-1-i)} \\
 &= \frac{1+2i-1}{1+2i} \\
 &= \frac{2i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \\
 &= \frac{2i+4}{1^2+2^2} \\
 &= \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i
 \end{aligned}$$

- 2 On résout l'équation  $f(z) = z$  :

$$\begin{aligned}
 f(z) = z &\iff \frac{z^2}{i-z} = z \\
 &\iff z^2 = z(i-z) \\
 &\iff 2z^2 - iz = 0 \\
 &\iff z(2z-i) = 0 \\
 &\iff z = 0 \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{2}i
 \end{aligned}$$

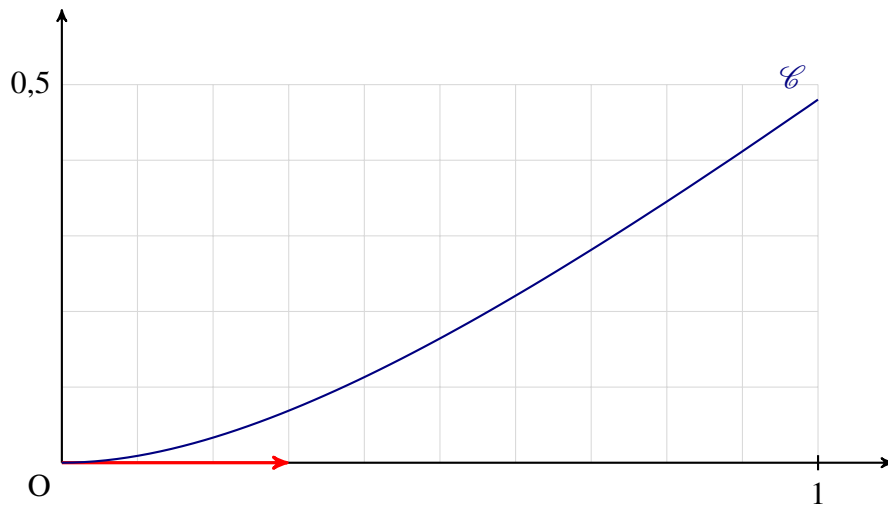
Par conséquent,  $f$  admet deux points fixes d'affixes respectives 0 et  $\frac{1}{2}i$ .

- 3 L'affixe du point  $A$  est un point fixe de  $\mathcal{F}$  ; par conséquent, le point  $A$  est sur l'ensemble tracé. Or,  $z_A = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$  donc  $A$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{2}$ , c'est-à-dire au cercle de centre  $O$  passant par le point de coordonnées  $(1; 1)$ . Ainsi,  $A$  est le point d'intersection de ce cercle avec l'ensemble tracé, dont l'abscisse est positive.



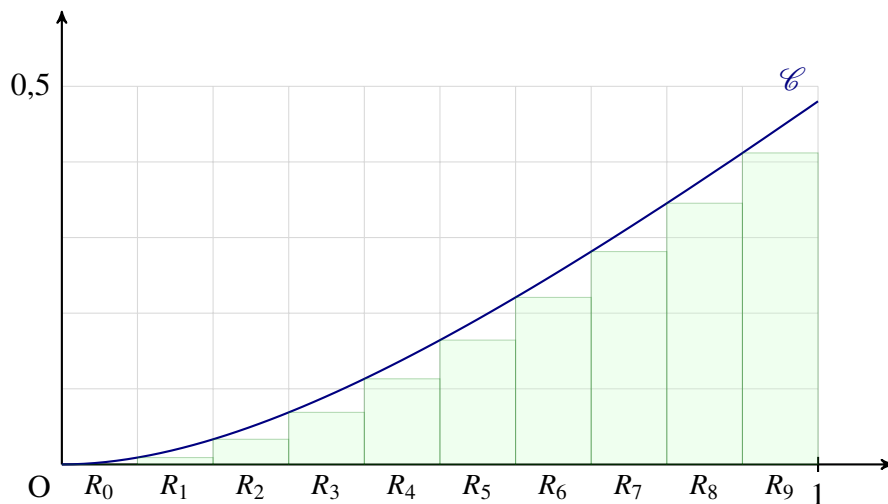
4  $f'(0) = \frac{2\ln(0+1)}{0+1} = 0$  donc la tangente à  $\mathcal{C}$  en 0 est horizontale. Or,  $f(0) = 0$  donc  $\mathcal{T}$  est l'axe des abscisses.

5



### Partie B : Calcul de l'approximation de l'aire

1



2 L'aire du rectangle  $R_k$  est :

$$A_k = \frac{1}{10} \times f\left(\frac{k}{10}\right),$$

où  $\frac{1}{10}$  représente la mesure de la largeur et  $f\left(\frac{k}{10}\right)$  sa longueur.

La somme des aires des rectangles est :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^9 \frac{1}{10} \times f\left(\frac{k}{10}\right) \\ &= \frac{1}{10} (f(0) + f(1) + \dots + f(9)) \end{aligned}$$

$$A \approx 0,165 \text{ u.a.}$$

$$\approx 0,165 \times 100 \text{ cm}^2$$

$$A \approx 16,487 \text{ cm}^2$$

$$a_{n+1} = (n+1)! \left[ \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n+1-k}}{k!} \right]$$

(ici, j'ai considéré le signe « - » comme étant  $(-1)$  et je l'ai inséré dans la somme)

$$= (n+1)! \left[ \frac{(-1)^{n+1-(n+1)}}{(n+1)!} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n+1-k}}{k!} \right]$$

(j'écris le terme avant la somme de la même manière que les termes de la somme elle-même afin de l'incorporer à l'intérieur du sigma)

$$= (n+1)! \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^{(n+1)-k}}{k!}$$

L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2,  $a_n = n! \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!}$ .

**8** Un programme Python possible est le suivant :

```
import math
from math import factorial as fac
from math import exp

def a(n):
    if n > 1:
        s = 0
        for k in range(2,n+1):
            s+=fac(n)*(-1)**(n-k)/fac(k)
        return s
    else:
        if n == 0:
            return 1
        else:
            return 0

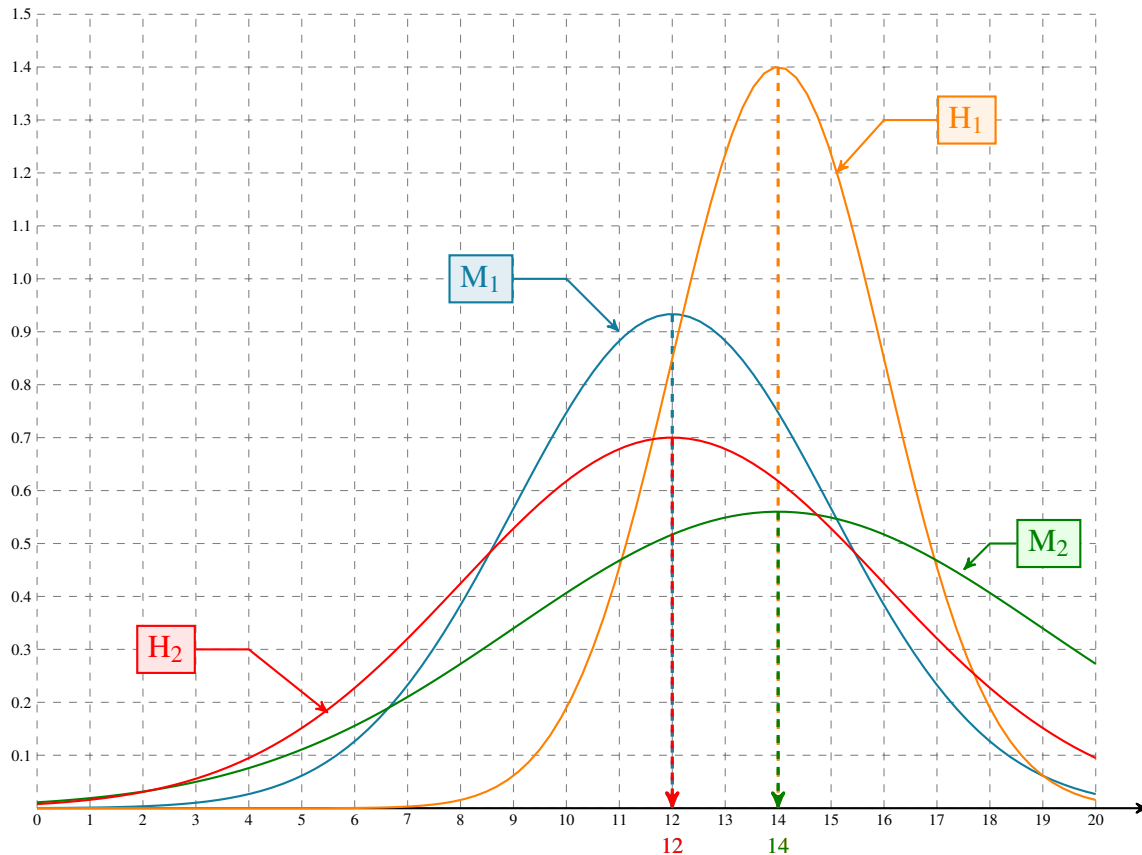
def b(n):
    return (-1)**(n+1)*fac(n)

def I(n):
    return a(n)*exp(1)+b(n)
```

En tapant  $I(4)$  par exemple, on verra s'afficher une valeur approchée de  $I_4$ .

■ Corrigé de l'exercice 19.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]



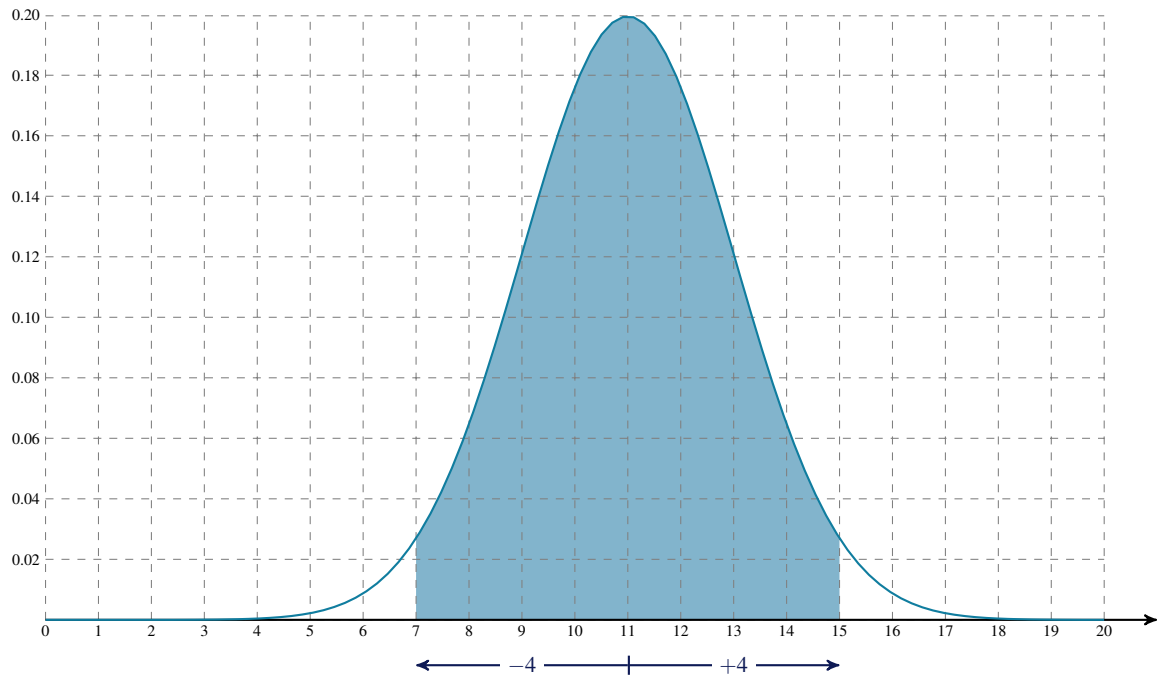
- On regarde en premier l'axe de symétrie des courbes : ils correspondent aux moyennes. Ainsi, les courbes verte et orange correspondent à une variable aléatoire dont la moyenne est égale à 14 ; elles ne peuvent donc que représenter  $H_1$  et  $M_2$ . Les deux autres courbes représentent donc  $M_1$  et  $H_2$ .
- On regarde ensuite « l'écartement » des courbes : plus il est grand, plus l'écart-type est grand. Ainsi, si l'on compare les courbes verte et orange, c'est la verte qui a le plus grand « écartement » donc elle correspond à  $M_2$  ; la courbe orange est donc pour  $H_1$ .
- Les courbes bleue et rouge ont un « écartement » similaire en apparence mais ce n'est pas le cas car le sommet de la bleue est au-dessus de celui de la rouge, ce qui signifie que son écartement est plus petit (elle est plus affinée). La courbe bleue correspond donc à  $M_1$  et donc la rouge correspond à  $H_2$ .

■ Corrigé de l'exercice 20.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

- 1 On regarde l'axe de symétrie de la courbe : il passe par 11, donc  $\mu = 11$ .
- 2 Un carreau du quadrillage représente 0,02 unité. Il faut donc trouver un intervalle centré en 11 sur lequel l'aire sous la courbe admet  $\frac{0,95}{0,02} = 47,5$  de ces carreaux. Il suffit alors de compter à droite de 11 et sous la courbe un peu moins de 24 carreaux (la moitié de 47,5 étant égale à 23,75). On va alors jusqu'à 15.

Ainsi, sur  $[7; 15]$ , il y a 47,5 de ces carreaux :



On peut donc considérer que  $P(7 \leq X \leq 15) \approx 0,95$ .

**3** D'après le cours,

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

ainsi, d'après ce que nous avons écrit précédemment,

$$2\sigma \approx 4 \quad \text{donc} \quad \underline{\underline{\sigma \approx 2.}}$$

The background features a gradient from deep blue at the bottom to purple at the top. On the left and right sides, there are glowing, ethereal shapes that resemble smoke or light trails, with a soft, bokeh-like effect. The text is centered in the middle of the image.

**Deuxième partie**

**Enseignement de spécialité**

**■ Corrigé de l'exercice 19.**[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1**
- $n = 1 : a = 7$  et  $b = 7$  donc  $\text{pgcd}(a; b) = 7$ .
  - $n = 11 : a = 47$  et  $b = 57$  donc  $\text{pgcd}(a; b) = 1$ .
  - $n = 15 : a = 63$  et  $b = 77$  donc  $\text{pgcd}(a; b) = 7$ .

**2**  $5a - 4b = 5(4n + 3) - 4(5n + 2)$   
 $= 20n + 15 - 20n - 8$   
 $= 7.$

Ainsi,  $5\left(\frac{a}{7}\right) - 4\left(\frac{b}{7}\right) = 1$ . De plus, 5 et 7 sont premiers entre eux, et il en est de même pour 4 et 7.

Par conséquent,  $a$  et  $b$  sont des multiples de 7 et donc  $d = \text{pgcd}(a; b)$  peut valoir 1 ou 7.

**3** a.  $4n + 3 = 7k \iff 4n - 7k = -3.$

Une solution particulière est  $(n_0; k_0) = (1; 1)$ . On a alors :

$$4 \times 1 - 7 \times 1 = -3$$

$$4 \times n - 7 \times k = -3$$

donc :

$$4(1 - n) - 7(1 - k) = 0$$

soit :

$$4(1 - n) = 7(1 - k).$$

4 et 7 étant premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss :

$$\begin{cases} 1 - k = 4q \\ 1 - n = 7q \end{cases} \quad q \in \mathbb{Z}$$

soit :

$$\begin{cases} k = 1 - 4q \\ n = 1 - 7q \end{cases} \quad q \in \mathbb{Z}_- \text{ (car } n \text{ et } k \text{ doivent être positifs).}$$

b. Par un raisonnement analogue à celui adopté à la question précédente, on a :

$$\begin{cases} k' = 1 - 5q' \\ n = 1 - 7q' \end{cases} \quad q' \in \mathbb{Z}_-.$$

- 4** D'après la question précédente, si le reste de la division euclidienne de  $n$  par 7 est égal à 1, alors  $a$  et  $b$  sont des multiples de 7 et donc  $d = 7$ .

Dans le reste des cas (sans jeu de mot),  $d = 1$ .

**■ Corrigé de l'exercice 20.**[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$a$  n'est pas divisible par 3 donc  $a \equiv 1 \pmod{3}$  ou  $a \equiv 2 \pmod{3}$ .

Ainsi,  $a^6 \equiv 1^6 \equiv 1 \pmod{3}$  ou  $a \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 1 \pmod{3}$  car  $64 = 3 \times 21 + 1$ .

Ainsi,  $a^6 - b^6 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$  et donc  $a^6 - b^6$  est divisible par 3.



## ■ Corrigé de l'exercice 35.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

Voici les fonctions :

```
def pgcd(a,b): # Calcul du pgcd de a et b
    while b!=0:
        a,b=b,a%b
    return a
def chiffrementAffine(a,b,L): # fonction de chiffrement affine
    if (pgcd(a,26)==1):
        alphabet=["A","B","C","D","E","F","G","H","I","J","K","L","M",
"N","O","P","Q","R","S","T","U","V","W","X","Y","Z"]
        x=alphabet.index(L)
        y=(a*x+b)%26
        return alphabet[y]
    else:
        return "Chiffrement impossible."
def inverse(a): # Calcul de l'inverse d'un nombre modulo 26
    x=0
    while (a*x%26!=1):
        x=x+1
    return x
def dechiffrementAffine(a,b,L): # Fonction de déchiffrement
    if (pgcd(a,b)==1):
        alphabet=["A","B","C","D","E","F","G","H","I","J","K","L","M",
"N","O","P","Q","R","S","T","U","V","W","X","Y","Z"]
        x=alphabet.index(L)
        y=(inverse(a)*(x-b))%26
        return alphabet[y]
    else:
        return "Déchiffrement impossible."
def crypt(M,a,b): # Affichage du mot chiffré
    mot = []
    for i in range(0,len(M)):
        mot.append(chiffrementAffine(a,b,M[i]))
    print ("".join(mot))
def decrypt(M,a,b): # Affichage du mot déchiffré
    mot = []
    for i in range(0,len(M)):
        mot.append(dechiffrementAffine(a,b,M[i]))
    print ("".join(mot))
```

En tapant : `crypt("MATHS",15,8)`, on voit : « GIHJ » et en tapant `decrypt("MIMVC",5,8)`, on voit : « GAGNE ».

# Calculs matriciels

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

**A** Exercices d'application du cours

**R** Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

4 février 2018

## Opérations sur les matrices

### ■ Exercice 1. Opérations élémentaires

★★★★☆ **A**

Corrigé page 297

On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

**1** Calculer  $A + B$ .

**3** Calculer  $AC$ .

**2** Calculer  $2A$ .

**4** Calculer  $CA$ .

### ■ Exercice 2. À la recherche d'une matrice

★★★★☆ **R**

Corrigé page 298

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**1** Vérifier que  $AI = IA = A$ .

**2** Trouver la matrice  $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  telle que  $AB = I$ .

**3** Vérifier que  $BA = I$ .

### ■ Exercice 3. Puissance d'une matrice et raisonnement par récurrence

★★★★☆ **R**

Corrigé page 298

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1** Calculer  $A^2$ .

**2** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $(I + A)^n = I + nA$ .

**3** En déduire une expression de  $B^n$  en fonction de  $n$ .

**2**

- **Initialisation.**

$(I+A)^1 = I+A = I+1A$  donc l'initialisation est faite.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier  $k$  strictement positif donné,  $(I+A)^k = I+kA$ .

$$\begin{aligned} (I+A)^{k+1} &= (I+A)^k(I+A) \\ &= (I+kA)(I+A) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= I^2 + IA + kAI + kA^2 && \text{en distribuant} \\ &= I+A+kA && \text{car } A^2 \text{ s'annule et } IA = AI = A \\ &= I+(1+k)A. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

L'égalité est alors vraie pour tout entier naturel non nul.

- On peut remarquer que  $B = I+A$ ; ainsi, d'après la question précédente,

$$B^n = I+nA = \begin{pmatrix} 1+2n & 4n \\ -n & 1-2n \end{pmatrix}$$

### ■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

**1**  $X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$

**2** On veut que  $X^2 = I_2$  donc  $\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Ainsi, on a le système : 
$$\begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d^2+bc=0 \end{cases}$$

On déduit de l'équation  $b(a+d)=0$  que  $b=0$  ou  $a+d=0$ , puis de l'équation  $c(a+d)=0$  que  $c=0$  ou  $a+d=0$ .

- Si  $b=0$ , alors  $a^2=0$  (donc  $a=0$ ),  $d^2=0$  (donc  $d=0$ ) et  $c(a+d)=0$  donc  $c \times 0 = 0$ , ce qui est toujours possible.

Dans ce cas,  $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

- Si  $b \neq 0$ , alors  $a+d=0$  donc  $d=-a$ . Ainsi,  $a^2+bc=0$  et donc  $c = -\frac{a^2}{b}$ .

Dans ce cas,  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$

### ■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

**1**  $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$ .

- 2**
- Si  $n = 3k$ ,  $A^n = (2I_3)^k = 2^k I_3$ .
  - Si  $n = 3k+1$ ,  $A^n = (2I_3)^k A = 2^k A$ .
  - Si  $n = 3k+2$ ,  $A^n = (2I_3)^k A^2 = 2^k A^2$ .