Les suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ en Terminale S

Fiche

par
Stéphane PASQUET

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

2 juin 2018

1 Question préliminaire

Pour étudier de telles suites, il est courant de voir une question de la forme :

« Montrer que pour tout entier naturel n, $a \leqslant u_n \leqslant b$ »

où a et b seront donnés par l'énoncé.

Pour y répondre, on peut utiliser un raisonnement par récurrence après avoir étudié la fonction f.

2 Étude de la fonction f

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n(2-u_n) \end{cases}$

Dans ce cas, u_{n+1} est de la forme $f(u_n)$ avec $f(x) = x(2-x)$, fonction polynôme du second degré ayant pour racines $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$, donc dont la représentation graphique est une parabole d'abscisse $x_S = \dfrac{x_0 + x_1}{2} = 1$, et dont le coefficient de x^2 est négatif (-1), d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\nearrow$		$\searrow$

On souhaite démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ par récurrence.

- **Initialisation.** $u_0 = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
  La propriété est vraie au rang initial.
- **Hérédité.** On suppose que pour un entier n fixé, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
  Comme f est strictement croissante sur $[0;1]$, on a donc :
  $$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$$
  (on ne change pas le sens des inégalités car la fonction est croissante sur $[0;1]$)
  Or, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ (par définition), ce qui signifie que :
  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$
  L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, nous venons de démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Remarque : en principe, la fonction sera toujours croissante sur l'intervalle $[a;b]$, sinon, il y a un problème dans la démonstration de l'hérédité (les signes changent de sens) et dans ce cas, cette méthode ne fonctionne pas, mais en Terminale S, ce cas n'est pas réellement traité.