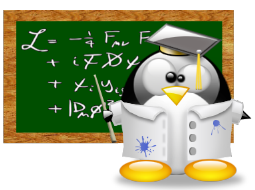
Sommaire



Prérequis

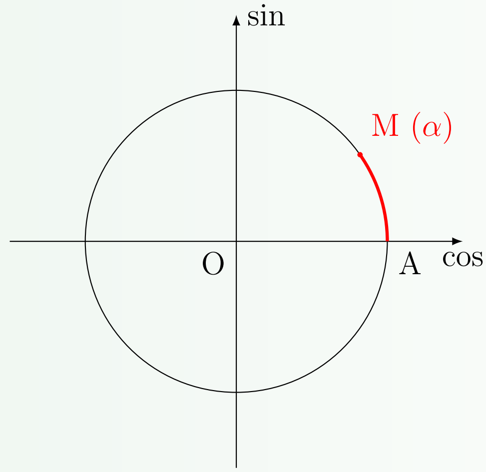
- Trigonométrie de Troisième et de Seconde

Définition *Cercle trigonométrique*

Soit un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.
Le `cercle trigonométrique` est le cercle de centre O et de rayon 1.
L'axe des abscisses est alors appelé l'axe des cosinus et l'axe des ordonnées, l'axe des sinus.

Définition *abscisse curviligne*

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère un point M sur le cercle trigonométrique.
L'`abscisse curviligne` α de M est la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{AM}}$, où $\mathrm{A}(1\,;0)$. On la note entre parenthèses à côté du point.



Remarque

Cette abscisse curviligne sera donc un nombre compris entre 0 et 2π.
En effet, le rayon du cercle étant égal à 1, le périmètre du cercle trigonométrique est 2π donc l'arc $\widehat{\mathrm{AM}}$ aura une longueur inférieure à 2π.

Définition *Mesure d'angle en radians*

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère un point M sur le cercle trigonométrique.
La mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{AOM}}$ exprimée en radians est égale à la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{AM}}$.

Exemple

Considérons le point M sur le cercle trigonométrique tel que $\widehat{\mathrm{AOM}} = 60^\circ$, et notons x la mesure de $\widehat{\mathrm{AOM}}$ en radians.
Pour 360° (un tour complet), l'arc mesure le périmètre du cercle trigonométrique, soit 2π. Donc, pour 60° (soit le sixième de 360°), l'arc mesure le sixième de 2π, soit $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.

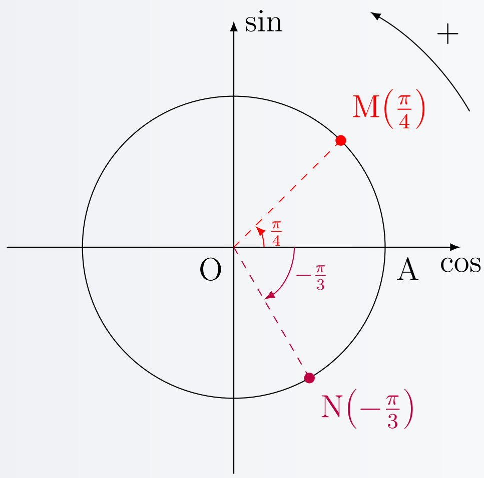
Propriété *Équivalences entre degrés et radians*

Angles en degrés	0	30	45	60	90	180	360
Angles en radians	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π

Définition *Sens trigonométrique*

Le `sens trigonométrique` est le sens inverse des aiguilles d'une montre. Il donne le signe d'un angle en radians.

Exemples



Définition *Mesure principale d'un angle*

La `mesure principale` d'un angle est la mesure de cet angle qui est comprise dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Méthode *Trouver la mesure principale d'un angle*

- **Cas n° 1.**
  Sur le cercle trigonométrique, considérons un point M d'abscisse curviligne $\dfrac{2\,014\pi}{17}$.
  Quelle est la mesure principale de l'angle $\widehat{\text{AOM}}$?

  1 On effectue la division euclidienne de 2 014 par 17.

$$2\,014 = 118 \times 17 + 8.$$

2 On réécrit la mesure de l'angle.

$$\begin{aligned}\frac{2\,014\pi}{17} &= \frac{(118\times 17+8)\pi}{17}\\ &= \frac{(118\times 17)\pi}{17}+\frac{8\pi}{17}\pi\\ &= 118\pi+\frac{8\pi}{17} &\longleftarrow \text{118 est pair}\\ &= 59\times 2\pi+\frac{8\pi}{17}\,.\end{aligned}$$

Cette dernière écriture signifie qu'en partant de A, on effectue 59 tours complets puis on ajoute $\dfrac{8\pi}{17}$ pour arriver au point M.

Ainsi, la mesure principale de l'angle $\widehat{\text{AOM}}$ est $\dfrac{8\pi}{17}$.

- **Cas n° 2.**

Sur le cercle trigonométrique, considérons un point M d'abscisse curviligne $\dfrac{2\,027\pi}{17}$.

Quelle est la mesure principale de l'angle $\widehat{\text{AOM}}$?

1 On effectue la division euclidienne de 2 027 par 17.

$$2\,027 = 119\times 17+4.$$

2 On réécrit la mesure de l'angle.

$$\begin{aligned}\frac{2\,027\pi}{17} &= \frac{(119\times 17+4)\pi}{17}\\ &= \frac{(119\times 17)\pi}{17}+\frac{4\pi}{17}\pi\\ &= 119\pi+\frac{4\pi}{17} &\longleftarrow \text{119 est impair}\\ &= (120-1)\pi+\frac{4\pi}{17}\\ &= 120\pi+\left(\frac{4\pi}{17}-\pi\right)\\ &= 60\times 2\pi-\frac{13\pi}{17}\,.\end{aligned}$$

Cette dernière écriture signifie qu'en partant de A, on effectue 60 tours complets puis on ajoute $-\dfrac{13\pi}{17}$ pour arriver au point M.

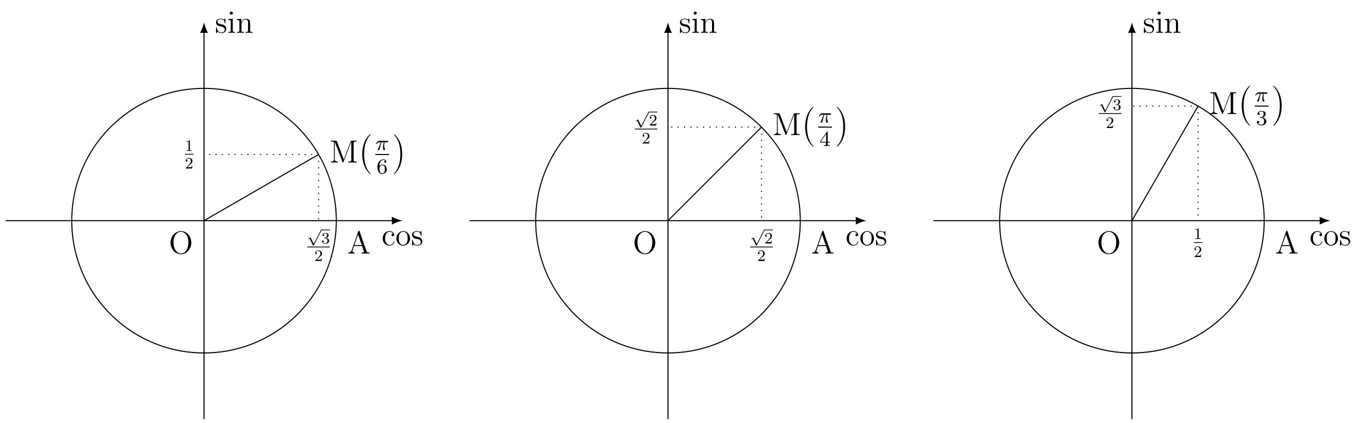
Ainsi, la mesure principale de l'angle $\widehat{\text{AOM}}$ est $-\dfrac{13\pi}{17}$.

Définitions *Sinus et cosinus d'un angle*

Soit un point M(α) sur le cercle trigonométrique.
Le `sinus` de α, noté $\sin\alpha$, est l'ordonnée du point M et le `cosinus` de α, noté $\cos\alpha$, est son abscisse.

Propriété *Valeurs remarquables de sinus et cosinus*

Mesures d'angles (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



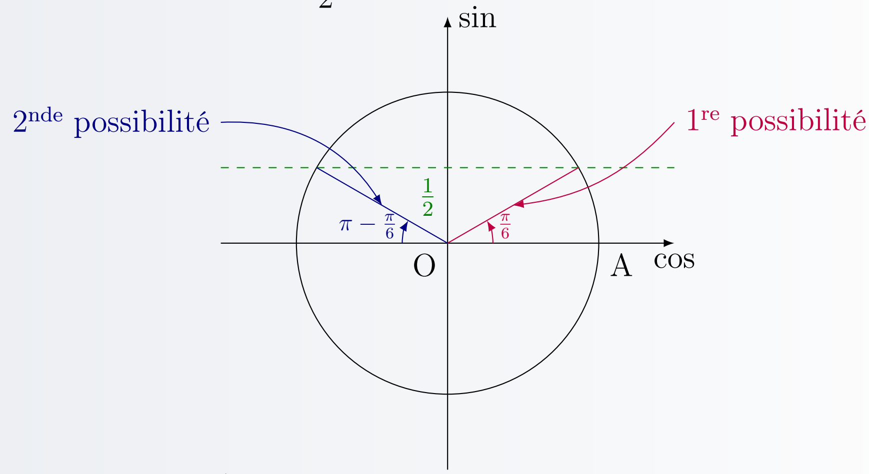
Propriété *Équations $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$*

$$\cos x = \cos a \iff \left(\begin{array}{l} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi \end{array}\right. , \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

$$\sin x = \sin a \iff \left(\begin{array}{l} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{array}\right. , \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

EXEMPLES

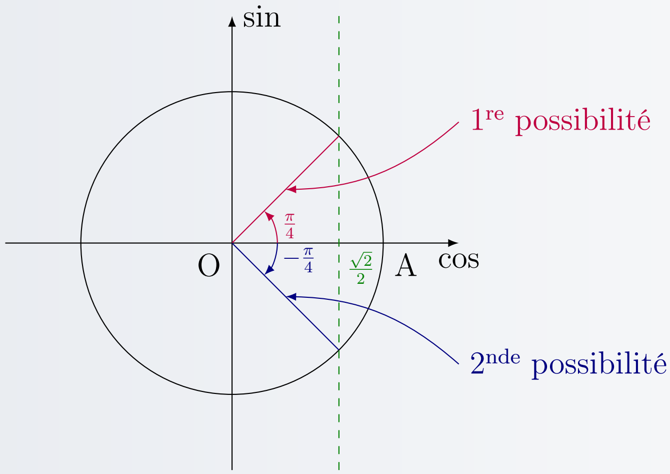
1 Soit à résoudre l'équation : $\sin x = \frac{1}{2}$.



$$\begin{aligned}
\sin x = \frac{1}{2} &\iff \sin x = \sin\frac{\pi}{6}\\
&\iff \left(\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \quad , \quad k \in \mathbb{Z}\\
&\iff \left(\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \quad , \quad k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2 Soit à résoudre l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\begin{aligned}
\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \cos x = \cos\frac{\pi}{4}\\
&\iff \left(\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right.
\end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$

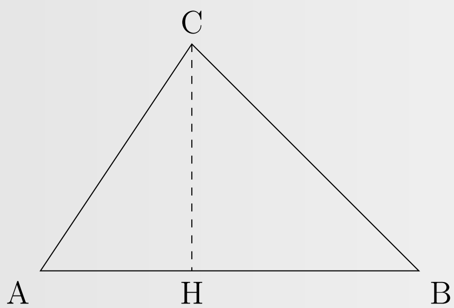
Donc, $\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Propriété *Aire d'un triangle*

Soit ABC un triangle quelconque.
En notant $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$ et $c = \mathrm{AB}$, l'aire $\mathscr{A}$ de ABC vérifie :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{\mathrm{B}}\ .$$

Démonstration



On note H le pied de la hauteur issue de C.
Dans AHC rectangle en H, on a :

$$\sin\widehat{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AC}}\ .$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \frac{\mathrm{CH}\times\mathrm{AB}}{2}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{AC}\times\sin\widehat{\mathrm{A}}\times\mathrm{AB}\\ &= \frac{1}{2}bc\sin\widehat{\mathrm{A}}\ .\end{aligned}$$

Une démonstration analogue peut être faite pour les autres égalités. ■

Propriété *Formule des sinus*

Soit ABC un triangle quelconque.
En notant $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$ et $c = \mathrm{AB}$, on a :

$$\frac{a}{\sin\widehat{\mathrm{A}}} = \frac{b}{\sin\widehat{\mathrm{B}}} = \frac{c}{\sin\widehat{\mathrm{C}}}\ .$$

Démonstration

De la propriété précédente, on sait que :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{\mathrm{B}}\ .$$

En multipliant ces égalités par $\dfrac{2}{abc}$, on obtient :

$$\frac{2\mathscr{A}}{abc} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{a} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{b} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{c}\ .$$

En prenant les inverses, on a les égalités de la propriété. ■