Raisonnement par récurrence

Terminale, enseignement de spécialité

7 septembre 2023

Réponses

Vous trouverez ci-dessous les réponses correctes.

1 **La propriété suivante peut être démontrée par récurrence :**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)^3 > 1+3x.$$

☐ Vrai ☑ Faux

La propriété ne dépend pas d'un ENTIER mais d'un RÉEL. Sa démonstration ne peut donc pas être par récurence (qui ne concerne que les propriétés dépendant d'un entier naturel).

2 **La proposition suivante peut être démontrée par récurrence :**

$$(\mathcal{P}_n)\ :\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

☑ Vrai ☐ Faux

3 **La proposition suivante peut être démontrée par récurrence :**

$$(\mathcal{P}_n)\ :\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

☑ Vrai ☐ Faux

4 **La proposition suivante peut être démontrée par récurrence :**

$$(\mathcal{P}_n)\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ 10^n+1 \text{ est divisible par } 9.$$

☐ Vrai ☑ Faux

5 **Soit $(\mathcal{P}_n)$ une propriété arithmétique dépendant de l'entier n.**
Le « principe de récurrence » stipule que si $(\mathcal{P}_0)$ est vraie, et si $(\mathcal{P}_k) \Rightarrow (\mathcal{P}_{k+1})$ pour tout entier naturel k, alors $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

☐ Vrai ☑ Faux

Dans l'hérédité, ce n'est pas :
« $(\mathcal{P}_k) \Rightarrow (\mathcal{P}_{k+1})$ pour tout entier naturel k », mais :
« $(\mathcal{P}_k) \Rightarrow (\mathcal{P}_{k+1})$ pour UN entier naturel k arbitrairement fixé. »

6 **La proposition suivante peut être démontrée par récurrence :**

$$(\mathcal{P}_n)\ :\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ n + p^2 \in \mathbb{N}.$$

☐ Vrai ☑ Faux

7 ***f*** **est une fonction strictement** ***croissante*** **définie sur $[0;5]$. On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.**
On sait que $u_1 > u_0$ et que $u_n \in [0;5]$, quel que soit n.
On peut alors démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante.

☑ Vrai ☐ Faux

> Le fait que la fonction soit croissante nous assure que l'on peut démontrer l'hérédité de la propriété, à savoir que la suite est croissante. En effet, dans l'hérédité,
>
> $$u_{k+1} > u_k \Rightarrow f(u_{k+1}) > f(u_k) \Rightarrow u_{k+2} > u_{k+1}.$$

8 ***f*** **est une fonction strictement** ***décroissante*** **définie sur $[0;5]$. On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 = 4$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.**
On sait que $u_1 < u_0$ et que $u_n \in [0;5]$, quel que soit n.
On peut alors démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.

☐ Vrai ☑ Faux

> Le fait que la fonction soit décroissante ne permet pas de démontrer l'hérédité de la propriété, à savoir que la suite est décroissante. En effet,
>
> $$u_{k+1} < u_k \Rightarrow f(u_{k+1}) > f(u_k) \Rightarrow u_{k+2} > u_{k+1}.$$
>
> L'inégalité est inversée.