Raisonnement par récurrence

Terminale, enseignement de spécialité

7 septembre 2023

Consigne

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est exacte. Laquelle ? Cochez la bonne réponse.

1 **La propriété suivante peut être démontrée par récurrence :**

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (1+x)^3 > 1+3x.$$

☐ Vrai ☐ Faux

2 **La proposition suivante peut être démontrée par récurrence :**

$$(\mathcal{P}_n)\ :\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

☐ Vrai ☐ Faux

3 **La proposition suivante peut être démontrée par récurrence :**

$$(\mathcal{P}_n)\ :\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

☐ Vrai ☐ Faux

4 **La proposition suivante peut être démontrée par récurrence :**

$$(\mathcal{P}_n)\ :\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ 10^n+1 \text{ est divisible par } 9.$$

☐ Vrai ☐ Faux

5 **Soit $(\mathcal{P}_n)$ une propriété arithmétique dépendant de l'entier n.**
Le « principe de récurrence » stipule que si $(\mathcal{P}_0)$ est vraie, et si $(\mathcal{P}_k) \Rightarrow (\mathcal{P}_{k+1})$ pour tout entier naturel k, alors $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

☐ Vrai ☐ Faux

6 **La proposition suivante peut être démontrée par récurrence :**

$$(\mathcal{P}_n) \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall p \in \mathbb{N}, \ n + p^2 \in \mathbb{N}.$$

☐ Vrai ☐ Faux

7 **f est une fonction strictement *croissante* définie sur $[0;5]$. On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.**
On sait que $u_1 > u_0$ et que $u_n \in [0;5]$, quel que soit n.
On peut alors démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante.

☐ Vrai ☐ Faux

8 **f est une fonction strictement *décroissante* définie sur $[0;5]$. On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 = 4$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.**
On sait que $u_1 < u_0$ et que $u_n \in [0;5]$, quel que soit n.
On peut alors démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.

☐ Vrai ☐ Faux