Limites de suites

Terminale, enseignement de spécialité

24 septembre 2023

Réponses

Vous trouverez ci-dessous les réponses correctes.

1 **La limite de la suite (u_n) définie par :**

$$u_n = \frac{4n^2 - 5n + 2}{2n + 5}$$

vaut :

- ☐ 0
- ☐ 2
- ☑ $+\infty$
- ☐ $-\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2 - 5n + 2}{2n + 5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2}{2n} = \lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty.$$

2 **La limite de la suite (u_n) définie par :**

$$u_n = \frac{4n^2 - 5n + 2}{2n^2 + 5}$$

vaut :

- ☐ 0
- ☑ 2
- ☐ $+\infty$
- ☐ $-\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2 - 5n + 2}{2n^2 + 5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} 2 = 2.$$

3 **La limite de la suite (u_n) définie par :**

$$u_n = \frac{4n^2 - 5n + 2}{2n^3 + 5}$$

vaut :

- ☑ 0
- ☐ 2
- ☐ $+\infty$
- ☐ $-\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2 - 5n + 2}{2n^3 + 5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2}{2n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

4 **La limite de la suite (u_n) définie par :**

$$u_n = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$$

vaut :

- ☐ 0
- ☑ 1
- ☐ $+\infty$
- ☐ $-\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

5 **Pour déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par :**

$$u_n = \frac{\cos(n)}{n} \ ,$$

on peut utiliser :

- ☐ La méthode par factorisation
- ☑ Le théorème des gendarmes
- ☐ Le théorème de comparaison

On peut en effet montrer que :

$$-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$$

et utiliser le théorème des gendarmes car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

6 **Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ et si, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$, alors on peut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ à l'aide du théorème :**

- ☐ des gendarmes
- ☑ de comparaison

$a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ donc $u_n \geqslant a_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, on utilise le théorème de comparaison pour trouver la limite de (u_n). Lorsqu'une limite est infinie, on ne peut pas utiliser le théorème des gendarmes (qui ne fonctionne que lorsque les deux limites sont communes et finies).

7 **Si $-n^2 \leqslant u_n \leqslant n^2$ pour tout entier naturel n alors que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?**

- ☐ $-\infty$
- ☐ $+\infty$
- ☐ 0
- ☑ On ne peut pas savoir

8 **(u_n) est une suite strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_n \leqslant 3$. Alors :**

- ☐ (u_n) converge vers 3
- ☑ (u_n) converge
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

9 **La suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 7$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ converge. Quelle est sa limite ?**

- ☐ 0
- ☑ 1
- ☐ $\sqrt{7}$
- ☐ On ne peut pas savoir

Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ alors $\ell = \sqrt{\ell}$. Les seules solutions à cette dernière équation sont 0 et 1. Mais $u_n \geqslant 1$ (on peut le montrer par récurrence) donc $\ell \neq 0$. La limite vaut donc 1.

10 **Soit (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue strictement croissante sur $[0\,;10]$ telle que $f(0) = 4$ et $f(10) = 6$. Alors, nécessairement :**

- ☐ (u_n) est croissante
- ☐ (u_n) n'existe pas
- ☑ Si $u_1 < u_0$ alors (u_n) converge
- ☐ On ne peut rien conclure

f est croissante donc $u_1 < u_0 \Rightarrow f(u_1) < f(u_0) \Rightarrow u_2 < u_3$. On peut montrer par récurrence que la suite est décroissante. Comme elle est minorée (par 4), elle converge (pas nécessairement vers 4).