Disponible sur *mathweb.fr*

122 exercices de mathématiques pour 2nde générale

Stéphane PASQUET

23 janvier 2018

Sommaire

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

23 janvier 2018

Algorithmique

Énoncés

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Ⓐ Exercices d'application du cours

Ⓡ Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

23 janvier 2018

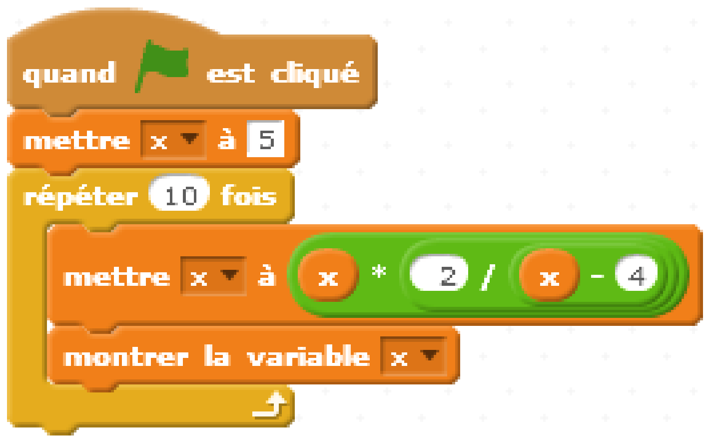
Traduire des programmes Scratch en algorithmes

■ Exercice 1. Programme de calculs

★☆☆☆☆ Ⓡ

Corrigé page 10 ✌

On considère le programme Scratch suivant :



Parmi les algorithmes suivants, lequel représente ce programme ?

Algorithme 1

Entrées

```
x est un nombre
y est un nombre
```

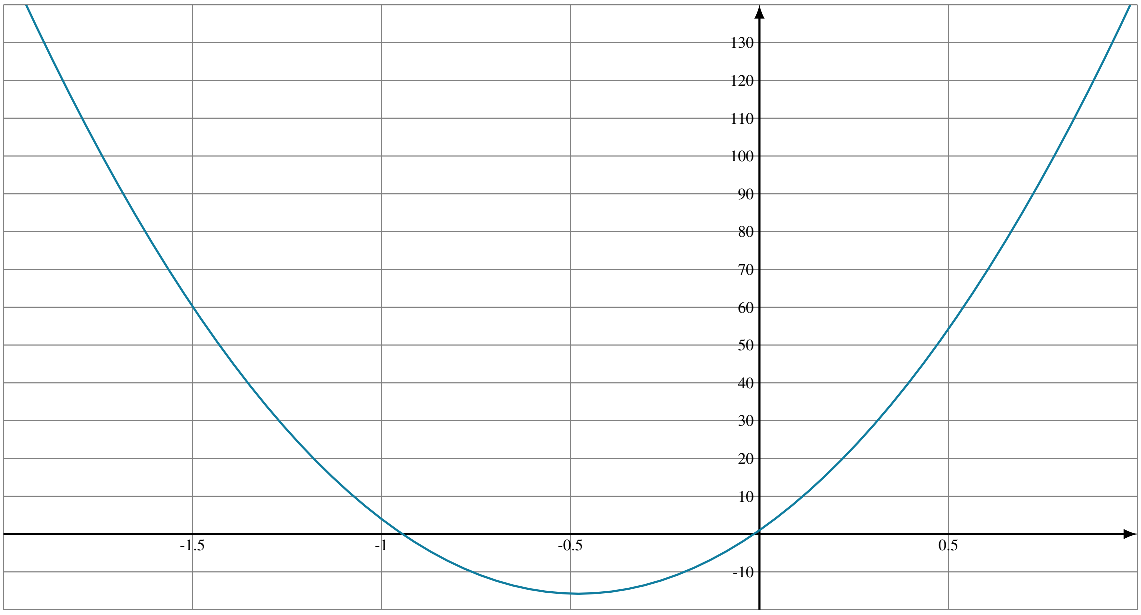
Traitement

```
Demander la valeur de x
Affecter à y la valeur 3*x-12/4
```

Sortie

```
Afficher y
```

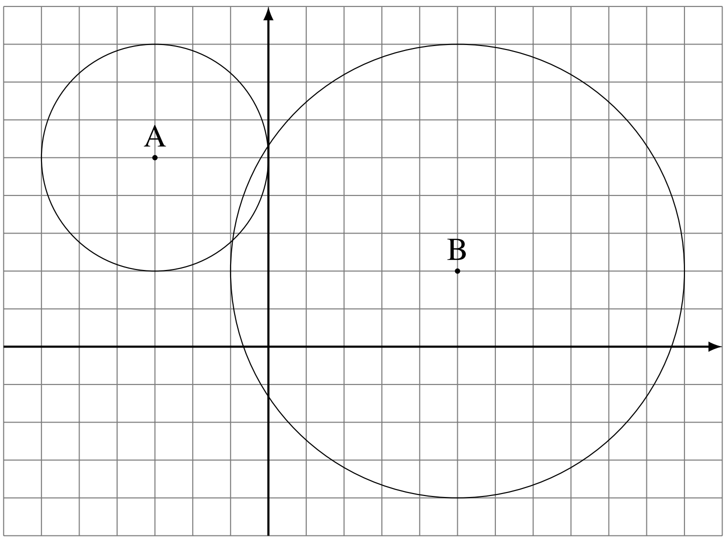
3 Sur la calculatrice, on :



On peut alors conjecture que $f(x) = 0$ deux fois car il y a 2 points d'intersection avec l'axe des abscisses.

<u>Il semble donc y avoir 2 points possibles à notre problème.</u>

Cela semble cohérent : ces deux points sont les intersections des cercles de centres A et B et de rayons respectifs 3 et 6.



$$
\begin{aligned}
H &= 4x^2 - 12x + 9 + (2x-3)(7x+1) \\
&= (2x-3)^2 + (2x-3)(7x+1) && \text{il faut que } 4x^2 = a^2 \text{ et } 9 = b^2\text{, donc } a = 2x \text{ et } b = 3 \\
&= (2x-3)(2x-3+7x+1) \\
&= \underline{(2x-3)(9x+2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= 25x^2 - 4 + 3(5x-2)(x+3) \\
&= (5x)^2 - 2^2 + 3(5x-2)(x+3) && \text{on fait apparaître une expression de la forme } a^2-b^2 \\
&= (5x-2)(5x+2) + 3(5x-2)(x+3) && \text{on factorise } a^2-b^2 \text{ en } (a-b)(a+b) \\
&= (5x-2)[5x+2+3(x+3)] \\
&= (5x-2)(5x+2+3x+9)] \\
&= \underline{(5x-2)(8x+11)}
\end{aligned}
$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

$$
\begin{aligned}
J &= (9x+18)(x+2) - (4x+20)(x+5) \\
&= 9(x+2)(x+2) - 4(x+5)(x+5) \\
&= [3(x+2)]^2 - [2(x+5)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2-b^2\text{, avec } a = 3(x+2) \text{ et } b = 2(x+5) \\
&= [3(x+2) - 2(x+5)][3(x+2) + 2(x+5)] \\
&= (3x+6-2x-10)(3x+6+2x+10) && \text{on développe dans les crochets} \\
&= \underline{(x-4)(5x+16)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K &= 2(2x+3)(4x+6) - 3(3x+2)(9x+6) \\
&= 2(2x+3) \times 2(2x+3) - 3(3x+2) \times 3(3x+2) \\
&= [2(2x+3)]^2 - [3(3x+2)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2-b^2 \\
&= [2(2x+3) - 3(3x+2)][2(2x+3) + 3(3x+2)] \\
&= (4x+6-9x-6)(4x+6+9x+6) && \text{on développe dans les crochets} \\
&= \underline{-5x(13x+12)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= 7(7x+1)(49x+7) + (1-4x)(16x-4) \\
&= 7(7x+1) \times 7(7x+1) - (4x-1) \times 4(4x-1) \\
&= [7(7x+1)]^2 - [2(4x-1)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2-b^2 \\
&= [7(7x+1) - 2(4x-1)][7(7x+1) + 2(4x-1)] \\
&= (49x+7-8x+2)(49x+7+8x-2) && \text{on développe dans les crochets} \\
&= \underline{(41x+9)(57x+5)}
\end{aligned}
$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 $A = 897\,526^2 - 897\,525 \times 897\,527$.

Posons $x = 897\,526$. Alors,

$$
\begin{aligned}
A &= x^2 - (x-1)(x+1) \\
&= x^2 - (x^2 - 1^2) \\
&= x^2 - x^2 + 1
\end{aligned}
$$

$$\boxed{A = 1}$$

2 $B = 100\,001^2 - 99\,999^2$.

Posons $x = 100\,000$. Alors,

$$
\begin{aligned}
B &= (x+1)^2 - (x-1)^2 \\
&= \left[(x+1) - (x-1)\right]\left[(x+1) + (x-1)\right] \\
&= 4x.
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{B = 4 \times 100\,000 = 400\,000}$.

4 $$\begin{aligned} x\sqrt{7}+\sqrt{2}=\sqrt{7}-x\sqrt{2} &\iff x\sqrt{7}+x\sqrt{2}=\sqrt{7}-\sqrt{2}\\ &\iff x\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{7}-\sqrt{2}\\ &\iff x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}\\ &\iff x=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}\\ &\iff x=\frac{\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\\ &\iff x=\frac{9-2\sqrt{14}}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{9-2\sqrt{14}}{5}\right\}}$.

5 $$\begin{aligned} \sqrt{(x-2)(3x+4)}=2(3x+4) &\iff \begin{cases} 2(3x+4)\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)=\left[2(3x+4)\right]^2 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} 3x+4\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)=4(3x+4)^2 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} 3x\geqslant -4\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)-4(3x+4)^2=0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (3x+4)\left[(x-2)-4(3x+4)\right]=0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (3x+4)(x-2-12x-16)=0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (3x+4)(-11x-18)=0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ \left(\begin{array}{l} 3x+4=0\\ \text{ou}\\ -11x-18=0 \end{array}\right. \end{cases} \end{aligned}$$

b. D'après ce qui a été fait dans la question **1** *b.*, l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}' &= (A'B')^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\\
&= \left(30+2x\sqrt{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}\\
&= \left[2\left(15+x\sqrt{3}\right)\right]^2\frac{\sqrt{3}}{4}\\
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}' = \left(15+x\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}$$

3 *a.* L'aire de l'allée ($\mathscr{A}'-\mathscr{A}$) est égale à celle du jardin ($\mathscr{A}$) donc $\mathscr{A}'-\mathscr{A}=\mathscr{A}$.
En ajoutant $\mathscr{A}$ à droite et à gauche du signe « = », on arrive à l'équation : $\mathscr{A}'=2\mathscr{A}$.

b.
$$\begin{aligned}
\mathscr{A}'=2\mathscr{A} &\iff \left(15+x\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}=450\sqrt{3}\\
&\iff \left(15+x\sqrt{3}\right)^2=450\\
&\iff 15+x\sqrt{3}=\sqrt{450} \qquad \left(\text{car } 15+x\sqrt{3}>0\right)\\
&\iff x\sqrt{3}=\sqrt{450}-15\\
&\iff x=\frac{\sqrt{450}-15}{\sqrt{3}}\\
&\iff x=\frac{15\sqrt{2}-15}{\sqrt{3}}\\
&\iff x=\frac{15\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{3}}{3}\\
&\iff \boxed{x=5\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)}
\end{aligned}$$

4 Considérons les points $A_1(4;30)$ et $B_1(6;55)$. L'équation de la droite (A_1B_1) est de la forme : $y = m_1x + p_1$.

$$m_1 = \frac{y_{B_1} - y_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}} = \frac{55-30}{6-4} = \frac{25}{2}$$

Ainsi, en remplaçant dans l'équation x et y par x_{A_1} et y_{A_1}, on a :

$$p_1 = y_{A_1} - m_1x_{A_1} = 30 - \frac{25}{2} \times 4 = -20$$

Donc $\boxed{(A_1B_1)\ :\ y = \frac{15}{2}x - 20}$

Considérons maintenant les points $A_2(4;70)$ et $B_2(6;45)$. L'équation de la droite (A_2B_2) est de la forme : $y = m_2x + p_2$.

$$m_2 = \frac{y_{B_2} - y_{A_2}}{x_{B_2} - x_{A_2}} = \frac{45-70}{6-4} = -\frac{25}{2}$$

Ainsi, en remplaçant dans l'équation x et y par x_{A_2} et y_{A_2}, on a :

$$p_2 = y_{A_2} - m_2x_{A_2} = 70 + \frac{25}{2} \times 4 = 120$$

Donc $\boxed{(A_2B_2)\ :\ y = -\frac{25}{2}x + 120}$

Soit $M\,(x_M; y_M)$ le point d'intersection de (A_1B_1) et (A_2B_2). Alors : $M \in (A_1B_1)$ et $M \in (A_2B_2)$ d'où :

$$y_M = \frac{25}{2}x_m - 20 = -\frac{25}{2}x_M + 120$$

Donc :

$$\frac{25}{2}x_M + \frac{25}{2}x_M = 120 + 20$$

Soit :

$$25x_M = 140$$

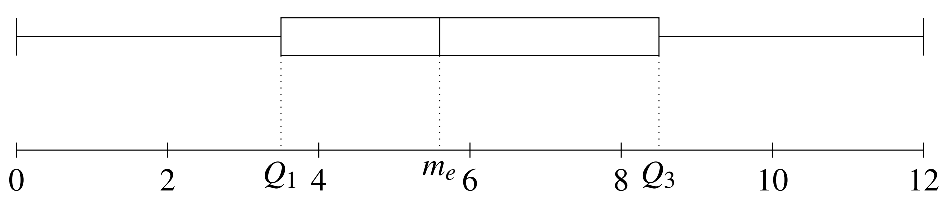
Ainsi :

$$x_M = \frac{140}{25} = 5{,}6$$

La médiane de la série est donc $m_e = 5{,}6$.

5 Le premier quartile Q_1 est à peu près de $Q_1 \approx 3{,}5$ (on regarde le polygone des e.c.c. au niveau de la droite à hauteur de 25) et $Q_3 \approx 8{,}5$ (on regarde le polygone des e.c.c. au niveau de la droite à hauteur de 75).

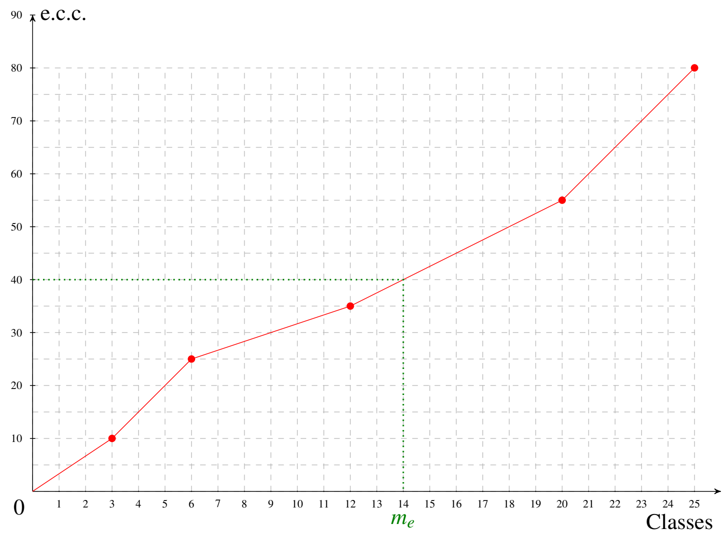
6 On a le diagramme en boîte suivant :



2 On a :

Classes	[0 ;3[	[3 ;6[	[6 ;12[	[12 ;20[	[20 ;25]
Effectifs	10	15	10	20	25
e.c.c.	10	25	35	55	80

D'où le graphique suivant :



On lit alors graphiquement que $m_e \approx 14$.

3 La moyenne est :

$$\overline{x} = \frac{2\times 10 + 4,5\times 15 + 9\times 10 + 16\times 20 + 22,5\times 25}{10+15+10+20+25}$$

$$\boxed{\overline{x} \approx 13,2}$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 La classe modale est la classe pour laquelle l'effectif est le plus grand. Ainsi, la classe modale est $]1\,600\,;1\,750]$.

L'étendue est égale à : $3\,500 - 1\,250 = 2\,250$.

2 On a :

Salaires (en €)	]1 250 ; 1 350]	]1 350 ; 1 450]	]1 450 ; 1 650]	]1 650 ; 1 750]	]1 750 ; 1 950]	]1 950 ; 2 150]	]2 150 ; 2 550]	]2 550 ; 3 550]
Effectifs	32	28	17	35	12	15	10	5
E.c.c.	32	60	77	112	124	139	149	154
Fréquences (%)	20,78	18,18	11,04	22,73	7,79	9,74	6,49	3,25