

Disponible sur *mathweb.fr*

122 exercices de
mathématiques pour
2nde générale

Stéphane PASQUET

23 janvier 2018

Sommaire

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

23 janvier 2018

I	Algorithmique	1
I.1	Programme de calculs	1
I.2	Une suite de nombres	2
I.3	Primalité d'un nombre	3
I.4	Laboratoire pharmaceutique	4
I.5	Le site marchand	5
I.6	Avec une fonction	5
I.7	Interprétation d'un algorithme	6
I.8	Complétion d'un algorithme	6
I.9	Écrire un algorithme	7
I.10	Comprendre un algorithme	7
I.11	Écrire un algorithme	8
I.12	Avec une fonction	8
I.13	Avec une suite de nombres	9
I.14	Écrire un programme Python	9
I.15	Écrire un programme Python	9
II	Repérage	19
II.1	Lecture de coordonnées de points	19
II.2	Milieu d'un segment	20
II.3	Lecture de coordonnées	20
II.4	Milieu d'un segment	21
II.5	Calcul de longueurs	21
II.6	Un premier bilan	21
II.7	Exercice de recherche	22
II.8	Trouver un point	22
II.9	Lire des coordonnées	22
II.10	Lire des coordonnées dans un parallélogramme	23
III	Développements	33
III.1	Double distributivité	33
III.2	Identités remarquables	33
III.3	Florilège de développements	33

IV	Factorisations	36
IV.1	Avec facteur commun évident	36
IV.2	En faisant apparaître le facteur commun	36
IV.3	À l'aide d'une identité remarquable	36
IV.4	À l'aide de la troisième identité remarquable	37
IV.5	À l'aide des identités remarquables	37
IV.6	À l'aide d'une identité remarquable	37
IV.7	Calculs astucieux	37
V	Équations & inéquations	44
V.1	Équations diverses	44
V.2	Équations avec carrés	44
V.3	Dans un triangle équilatéral	45
V.4	Équations avec racines carrées	45
V.5	Inéquations diverses	45
V.6	Dans le jardin	46
VI	Fonctions : généralités	60
VI.1	Reconnaître la courbe représentative d'une fonction	60
VI.2	Tableau de valeurs à la calculatrice	61
VI.3	Appartenance de points à une courbe	61
VI.4	Images et antécédents	61
VI.5	Construction d'un tableau de variations	62
VI.6	Construction d'un tableau de variations avec valeur interdite	62
VI.7	Lecture d'un tableau de variations	63
VI.8	Résolution graphique d'équations et d'inéquations	64
VI.9	Résolution graphique d'équations et d'inéquations	64
VI.10	Déduction par lecture graphique	65
VI.11	Établir une expression d'une fonction	66
VI.12	Triangle équilatéral	67
VII	Équation de droites	78
VII.1	À partir d'un graphique	78
VII.2	À partir des coordonnées de points	78
VII.3	Appartenance de points à une droite	78
VII.4	Intersection de deux droites – Vecteur directeur	79
VII.5	Une histoire d'aire	79
VII.6	Les taxis	80
VIII	Systèmes linéaires	85
VIII.1	Quelques systèmes pêle-mêle	85
VIII.2	Avec des coefficients radicaux	85
VIII.3	Avec des coefficients fractionnaires	85
VIII.4	Avec changement de variables	86
VIII.5	Trouver le point d'intersection d'une droite	86
VIII.6	Trouver l'expression d'une fonction affine	86
VIII.7	Concurrence de droites	86
VIII.8	Écrire un algorithme	86
VIII.9	Les chocolats	87
VIII.10	Mandarines et clémentines	87
VIII.11	L'âge de Fido (problème de Sam Loyd)	87

VIII.12 Le problème du marché (problème de Sam Loyd)	87
IX Fonctions du second degré	101
IX.1 Forme canonique & factorisation	101
IX.2 Sens de variation	101
IX.3 Aire d'un triangle dans un triangle équilatéral	101
X Vecteurs	108
X.1 Placement de points	108
X.2 Égalités de vecteurs	108
X.3 Relation de Chasles	108
X.4 Placement de points & alignement de points	109
X.5 Exprimer un vecteur en fonction d'un autre	109
X.6 Construction de points, égalité vectorielle	109
X.7 Dans un repère, trouver des coordonnées	109
X.8 Alignement de points & nature d'un triangle	110
X.9 Distance & milieu	110
X.10 Alignement de points	110
X.11 Milieu, centre de gravité, points alignés	110
X.12 À la recherche d'un nombre	111
X.13 Alignement de points	111
X.14 Alignement de points avec un triangle isocèle	111
X.15 Exercice récapitulatif	112
X.16 Triangles équilatéraux et points alignés	112
X.17 Prendre des initiatives	113
XI Géométrie dans l'espace	127
XI.1 Tétraèdre & parallélogramme	127
XI.2 Cube & section	127
XI.3 Parallélépipède, distance & volume	128
XI.4 Cube, distance, volume & aire	128
XI.5 Droites & plans parallèles et sécants	129
XI.6 Cube et angle au centre	129
XI.7 Pyramide et intersection	130
XI.8 Construction d'un cube et d'une pyramide	131
XII Statistiques	138
XII.1 Caractères discrets : moyenne, e.c.c. et médiane	138
XII.2 Moyenne, e.c.c. & médiane avec classes	138
XII.3 Calcul d'effectifs, diagramme en barres	139
XII.4 Calculs avec classes	139
XII.5 Salaires dans une entreprise	139
XIII Probabilités	146
XIII.1 QCM	146
XIII.2 Lancer de deux dés équilibrés	146
XIII.3 Réunion et intersection	147
XIII.4 Avec un dé portant des lettres	147
XIII.5 Dans un magasin	147
XIII.6 Dans un sac	148
XIII.7 Changement d'univers	148

XIII.8	Le digicode	149
XIII.9	Chez les profs de math	149

XIV Fluctuations et échantillonnage 157

XIV.1	Le dé d'Al	157
XIV.2	Le Dédale	157
XIV.3	Influence de la taille d'un échantillon	157
XIV.4	Fourchette de sondage	158
XIV.5	Taux de réussite au bac	158
XIV.6	Recherche de la taille d'un échantillon	158
XIV.7	Inspiré par les comics Marvel (d'après SESAMATH 2014)	158
XIV.8	Taux de passage en Premières S et ES	158
XIV.9	Effet placebo	159

Algorithmique

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

- A Exercices d'application du cours
- R Exercices de réflexion
- ✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

23 janvier 2018

Traduire des programmes Scratch en algorithmes

■ Exercice 1. Programme de calculs

★★★★★ R

Corrigé page 10 ✌

On considère le programme Scratch suivant :



Parmi les algorithmes suivants, lequel représente ce programme ?

Algorithme 1

Entrées

x est un nombre
y est un nombre

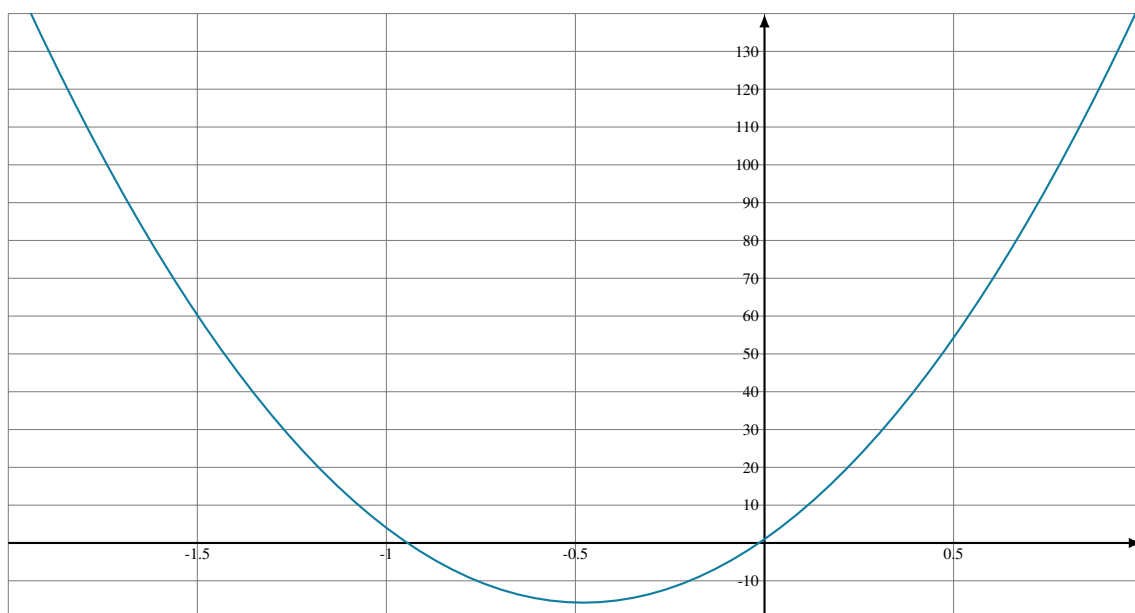
Traitement

Demander la valeur de x
Affecter à y la valeur $3x-12/4$

Sortie

Afficher y

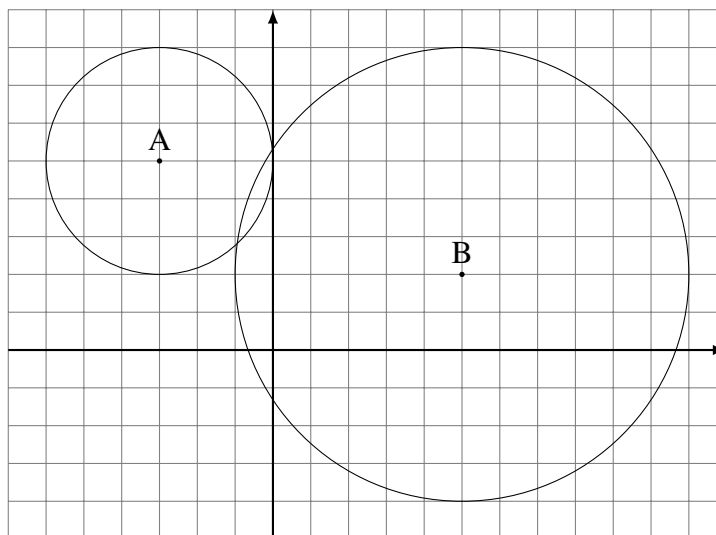
3 Sur la calculatrice, on :



On peut alors conjecturer que $f(x) = 0$ deux fois car il y a 2 points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Il semble donc y avoir 2 points possibles à notre problème.

Cela semble cohérent : ces deux points sont les intersections des cercles de centres A et B et de rayons respectifs 3 et 6.



$$\begin{aligned}
 H &= 4x^2 - 12x + 9 + (2x - 3)(7x + 1) \\
 &= (2x - 3)^2 + (2x - 3)(7x + 1) && \text{il faut que } 4x^2 = a^2 \text{ et } 9 = b^2, \text{ donc } a = 2x \text{ et } b = 3 \\
 &= (2x - 3)(2x - 3 + 7x + 1) \\
 &= \underline{(2x - 3)(9x + 2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= 25x^2 - 4 + 3(5x - 2)(x + 3) \\
 &= (5x)^2 - 2^2 + 3(5x - 2)(x + 3) && \text{on fait apparaître une expression de la forme } a^2 - b^2 \\
 &= (5x - 2)(5x + 2) + 3(5x - 2)(x + 3) && \text{on factorise } a^2 - b^2 \text{ en } (a - b)(a + b) \\
 &= (5x - 2)[5x + 2 + 3(x + 3)] \\
 &= (5x - 2)(5x + 2 + 3x + 9) \\
 &= \underline{(5x - 2)(8x + 11)}
 \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
 J &= (9x + 18)(x + 2) - (4x + 20)(x + 5) \\
 &= 9(x + 2)(x + 2) - 4(x + 5)(x + 5) \\
 &= [3(x + 2)]^2 - [2(x + 5)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2 - b^2, \text{ avec } a = 3(x + 2) \text{ et } b = 2(x + 5) \\
 &= [3(x + 2) - 2(x + 5)][3(x + 2) + 2(x + 5)] \\
 &= (3x + 6 - 2x - 10)(3x + 6 + 2x + 10) && \text{on développe dans les crochets} \\
 &= \underline{(x - 4)(5x + 16)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= 2(2x + 3)(4x + 6) - 3(3x + 2)(9x + 6) \\
 &= 2(2x + 3) \times 2(2x + 3) - 3(3x + 2) \times 3(3x + 2) \\
 &= [2(2x + 3)]^2 - [3(3x + 2)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2 - b^2 \\
 &= [2(2x + 3) - 3(3x + 2)][2(2x + 3) + 3(3x + 2)] && \text{on développe dans les crochets} \\
 &= (4x + 6 - 9x - 6)(4x + 6 + 9x + 6) \\
 &= \underline{-5x(13x + 12)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= 7(7x + 1)(49x + 7) + (1 - 4x)(16x - 4) \\
 &= 7(7x + 1) \times 7(7x + 1) - (4x - 1) \times 4(4x - 1) \\
 &= [7(7x + 1)]^2 - [2(4x - 1)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2 - b^2 \\
 &= [7(7x + 1) - 2(4x - 1)][7(7x + 1) + 2(4x - 1)] && \text{on développe dans les crochets} \\
 &= (49x + 7 - 8x + 2)(49x + 7 + 8x - 2) \\
 &= \underline{(41x + 9)(57x + 5)}
 \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $A = 897526^2 - 897525 \times 897527.$

Posons $x = 897526$. Alors,

$$\begin{aligned}
 A &= x^2 - (x - 1)(x + 1) \\
 &= x^2 - (x^2 - 1^2) \\
 &= x^2 - x^2 + 1
 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 1}$$

2 $B = 100001^2 - 99999^2.$

Posons $x = 100000$. Alors,

$$\begin{aligned}
 B &= (x + 1)^2 - (x - 1)^2 \\
 &= [(x + 1) - (x - 1)][(x + 1) + (x - 1)] \\
 &= 4x.
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{B = 4 \times 100000 = 400000}.$

$$\begin{aligned}
4 \quad x\sqrt{7} + \sqrt{2} = \sqrt{7} - x\sqrt{2} &\iff x\sqrt{7} + x\sqrt{2} = \sqrt{7} - \sqrt{2} \\
&\iff x(\sqrt{7} + \sqrt{2}) = \sqrt{7} - \sqrt{2} \\
&\iff x = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} \\
&\iff x = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})} \\
&\iff x = \frac{(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} \\
&\iff x = \frac{9 - 2\sqrt{14}}{5}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{9 - 2\sqrt{14}}{5} \right\}$.

$$\begin{aligned}
5 \quad \sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4) &\iff \begin{cases} 2(3x+4) \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) = [2(3x+4)]^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) = 4(3x+4)^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x \geq -4 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) - 4(3x+4)^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (3x+4)[(x-2) - 4(3x+4)] = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (3x+4)(x-2-12x-16) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (3x+4)(-11x-18) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ \left(\begin{array}{l} 3x+4 = 0 \\ \text{ou} \\ -11x-18 = 0 \end{array} \right) \end{cases}
\end{aligned}$$

b. D'après ce qui a été fait dans la question **1** b., l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= (A'B')^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= (30 + 2x\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= [2(15 + x\sqrt{3})]^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \boxed{\mathcal{A}' = (15 + x\sqrt{3})^2 \sqrt{3}} \end{aligned}$$

3 a. L'aire de l'allée ($\mathcal{A}' - \mathcal{A}$) est égale à celle du jardin (\mathcal{A}) donc $\mathcal{A}' - \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

En ajoutant \mathcal{A} à droite et à gauche du signe « = », on arrive à l'équation : $\mathcal{A}' = 2\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} b. \mathcal{A}' = 2\mathcal{A} &\iff (15 + x\sqrt{3})^2 \sqrt{3} = 450\sqrt{3} \\ &\iff (15 + x\sqrt{3})^2 = 450 \\ &\iff 15 + x\sqrt{3} = \sqrt{450} \quad (\text{car } 15 + x\sqrt{3} > 0) \\ &\iff x\sqrt{3} = \sqrt{450} - 15 \\ &\iff x = \frac{\sqrt{450} - 15}{\sqrt{3}} \\ &\iff x = \frac{15\sqrt{2} - 15}{\sqrt{3}} \\ &\iff x = \frac{15(\sqrt{2} - 1)\sqrt{3}}{3} \\ &\iff \boxed{x = 5\sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)} \end{aligned}$$

- 4 Considérons les points $A_1(4;30)$ et $B_1(6;55)$. L'équation de la droite (A_1B_1) est de la forme : $y = m_1x + p_1$.

$$m_1 = \frac{y_{B_1} - y_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}} = \frac{55 - 30}{6 - 4} = \frac{25}{2}$$

Ainsi, en remplaçant dans l'équation x et y par x_{A_1} et y_{A_1} , on a :

$$p_1 = y_{A_1} - m_1x_{A_1} = 30 - \frac{25}{2} \times 4 = -20$$

Donc $(A_1B_1) : y = \frac{15}{2}x - 20$

Considérons maintenant les points $A_2(4;70)$ et $B_2(6;45)$. L'équation de la droite (A_2B_2) est de la forme : $y = m_2x + p_2$.

$$m_2 = \frac{y_{B_2} - y_{A_2}}{x_{B_2} - x_{A_2}} = \frac{45 - 70}{6 - 4} = -\frac{25}{2}$$

Ainsi, en remplaçant dans l'équation x et y par x_{A_2} et y_{A_2} , on a :

$$p_2 = y_{A_2} - m_2x_{A_2} = 70 + \frac{25}{2} \times 4 = 120$$

Donc $(A_2B_2) : y = -\frac{25}{2}x + 120$

Soit $M(x_M; y_M)$ le point d'intersection de (A_1B_1) et (A_2B_2) . Alors : $M \in (A_1B_1)$ et $M \in (A_2B_2)$ d'où :

$$y_M = \frac{25}{2}x_M - 20 = -\frac{25}{2}x_M + 120$$

Donc :

$$\frac{25}{2}x_M + \frac{25}{2}x_M = 120 + 20$$

Soit :

$$25x_M = 140$$

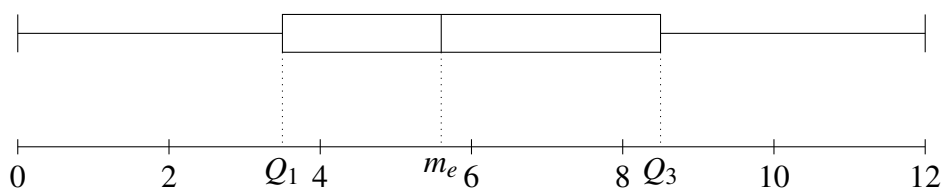
Ainsi :

$$x_M = \frac{140}{25} = 5,6$$

La médiane de la série est donc $m_e = 5,6$.

- 5 Le premier quartile Q_1 est à peu près de $Q_1 \approx 3,5$ (on regarde le polygone des e.c.c. au niveau de la droite à hauteur de 25) et $Q_3 \approx 8,5$ (on regarde le polygone des e.c.c. au niveau de la droite à hauteur de 75).

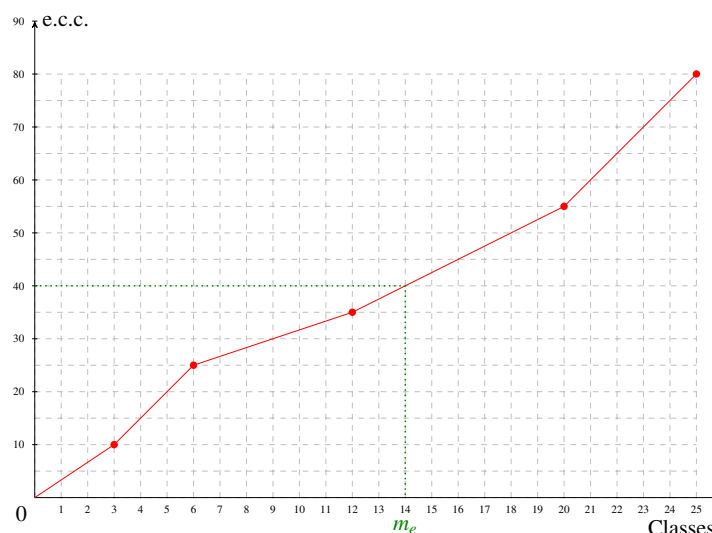
- 6 On a le diagramme en boîte suivant :



2 On a :

Classes	[0;3[[3;6[[6;12[[12;20[[20;25]
Effectifs	10	15	10	20	25
e.c.c.	10	25	35	55	80

D'où le graphique suivant :



On lit alors graphiquement que $m_e \approx 14$.

3 La moyenne est :

$$\bar{x} = \frac{2 \times 10 + 4,5 \times 15 + 9 \times 10 + 16 \times 20 + 22,5 \times 25}{10 + 15 + 10 + 20 + 25}$$

$$\bar{x} \approx 13,2$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 La classe modale est la classe pour laquelle l'effectif est le plus grand. Ainsi, la classe modale est]1 600; 1 750].

L'étendue est égale à : $3\,500 - 1\,250 = 2\,250$.

2 On a :

Salaires (en €)]1250;1350]]1350;1450]]1450;1650]]1650;1750]]1750;1950]]1950;2150]]2150;2550]]2550;3550]
Effectifs	32	28	17	35	12	15	10	5
E.c.c.	32	60	77	112	124	139	149	154
Fréquences (%)	20,78	18,18	11,04	22,73	7,79	9,74	6,49	3,25